**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

МАТЕМАТИКА

В 2-х частях

Часть 2

*Учебно-методический комплекс
для студентов
высших учебных заведений
по направлению образования 74 06 Агроинженерия*

**Минск
2009**

УДК 51(07)
ББК 22.1я 7
М 34

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом АЭФ БГАТУ

Протокол № 8 от 13 апреля 2009 г.

Авторы:
канд. физ.-мат. наук, доц. *И.М. Морозова,*
канд. физ.-мат. наук, доц. *Л.А. Хвощинская,*
канд. физ.-мат. наук, доц. *Н.Н. Дедок,*
ассист. каф. ВМ *И.П. Боярина*

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теории функций БГУ *Н.В. Бровка;*
д-р тех. наук, профессор, зав. каф. теоретической механики и теории механизмов и машин БГАТУ *А.Н. Орда*

М34 **Математика:** В 2-х ч. Ч. 2: учеб.-метод. комплекс / И.М.Морозова [и др.] – Минск.: БГАТУ, 2009. – 144 с.
ISBN 978-985-519-057-9.

**УДК 51(07)
ББК 22.1я 7**

ISBN 978-985-519-057-9

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины «Математика» предназначен для студентов высших учебных заведений по направлению образования 74 06 Агроинженерия.

В результате изучения дисциплины «Математика» студент должен

знать:

- основные понятия и методы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа;
- основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;
- численные методы решения инженерных задач;

уметь:

- решать алгебраические системы уравнений;
- дифференцировать и интегрировать функции;
- решать обыкновенные дифференциальные уравнения;
- составлять математические модели производственных задач, решать их математическими методами с применением вычислительной техники и анализировать полученные данные.

УМК составлен в соответствии с учебной программой дисциплины «Математика», разработанной по модульной технологии обучения и состоит из двух частей. В УМК каждый модуль содержит теоретический материал, задачи для самостоятельной работы студентов, а также разноуровневые тестовые задания для самоконтроля знаний (задания репродуктивного уровня отмечены ^{0}, а задания творческого уровня отмечены *). В УМК предложены образцы итоговых тестов по модулям, изученным в семестре.

УМК «Математика. Часть 1» содержит модули: 1. «Элементы линейной и векторной алгебры», 2. «Аналитическая геометрия», 3. «Введение в анализ», 4. «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», 5. «Неопределенный интеграл», 6. «Определенный интеграл», 7. «Функции нескольких переменных».

В УМК «Математика. Часть 2» включены следующие модули: 8. «Комплексные числа», 9. «Дифференциальные уравнения», 10. «Ряды», 11. «Двойной интеграл», 12. «Криволинейный интеграл», 13. «Элементы теории поля», 14. «Теория вероятностей».

НАИМЕНОВАНИЕ МОДУЛЕЙ И ИХ СОДЕРЖАНИЕ (3 СЕМЕСТР)

В соответствии с учебной программой по изучению дисциплины "Математика" для инженерно-технических специальностей аграрных вузов в третьем семестре изучаются следующие модули.

Модуль 8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Комплексные числа. Геометрическое изображение комплексного числа. [1] т.2, часть IV, раздел 1, § 1.
2. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. [1] т.2, часть IV, раздел 1, § 1.
3. Показательная функция с комплексным показателем. Формулы Эйлера. Показательная форма комплексного числа. [1] т.2, часть IV, раздел 1, § 1.
4. Действия над комплексными числами. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа. [1] т.2, часть IV, раздел 1, § 1.

5^э. Комплексная форма записи синусоидального тока. Комплексная амплитуда и комплексное действующее значение синусоидального тока. [8], § 4.

Модуль 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения: порядок уравнения, общее и частное решение, общий и частный интеграл. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 1, 2.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 1, 2.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 1, 2.
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 1, 2.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 1, 2.

Вопросы, отмеченные символом ^{э}, изучаются только студентами агроэнергетического факультета БГАТУ.

6. Уравнение Бернулли. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 1, 2.
7. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 3.
8. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 3.
9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка со специальной правой частью.[1] т.2, часть IV, раздел 2, § 4, 5, 6, 7.

10^э.Системы линейных дифференциальных уравнений. [1] т.2, часть IV, раздел 2, § 10.

Модуль 10. РЯДЫ

1. Понятие числового ряда и его суммы. [1] т.1, часть II, § 20.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд. [1] т.1, часть II, § 20.
3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов: признак сравнения, призак Д΄Аламбера, радикальный признак Коши, интегральный призак Коши. [1] т.1, часть II, § 20.
4. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда. [1] т.1, часть II, § 20.
5. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. [1] т.1, часть II, § 20.
6. Степенной ряд. Теорема Абеля. [1] т.1, часть II, § 21.
7. Радиус и область сходимости степенного ряда.[1]т.1,частьII, § 21.
8. Формулы Тейлора и Маклорена. [1] т.1, часть II, § 22.
9. Ряды Тейлора и Маклорена. Условия разложимости функции в степенной ряд. [1] т.1, часть II, § 22.
10. Степеные ряды элементарных функций. [1] т.1, ч.II,§ 22.
11. Биноминальный ряд. [1] т.1, часть II, § 22.
12. Приложения рядов к приближенным вычислениям. [1] т.1, часть II, § 22.

13^э.Тригонометрический ряд. Ряд Фурье для функции с периодом $T = 2\pi$. Теорема о разложимости периодической функции в ряд Фурье. [1] т.1, часть II, § 23.

14^э.Ряды Фурье для четной и нечетной функций.[1] т.1, часть II, §23.

15^э.Ряд Фурье для функции с периодом $T = 2l$. [1] т.1, часть II, § 23.

16^э.Разложение в ряд Фурье непериодических функций, заданных на отрезке. [1] т.1, часть II, § 23.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика для инженеров: В 2 т.Т.1,2: учеб. пособие для вузов/ С.А.Минюк, В.И.Булгаков, А.В.Метельский, З.М.Наркун; подобщ.ред.Н.А.Микулика.–н.:ОООЭлайда»,2004.
2. Гусак, А.А.Высшая математика: Т.2. – Мн.: Тетра Системс, 2006.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике:В.4 ч.: учеб. пособие / под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. школа, 2007.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Т. 1, 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.
5. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1985.
6. Высшая математика в упражнениях и задачах: Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Мн.: Выш. школа, 1986.
7. Общий курс высшей математики/Р.М.Жевняк[и др.]– Орша,1996
8. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1989.
9. Лихолетов, И.И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И.И. Лихолетов, И.П. Мацкевич. – Мн.: Выш. школа, 1976.
10. Комплексные числа и их применение в электротехнике. Методические указания и задания для агроэнергетических специальностей БГАТУ. Мн.: БГАТУ, 2002.

Модуль 8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Определение и геометрическое изображение комплексного числа

Попытки решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом привели к возникновению понятия комплексных чисел.

Комплексным числом называется число вида

$$z = x + iy\,, \tag{8.1}$$

где x, y – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ $(i^2 = -1)$ – мнимая единица.

В технической литературе используют обозначение $j = \sqrt{-1}$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа, а y – его *мнимой частью* и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Запись $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Множество всех комплексных чисел обозначают **C**.

При $y = 0$ получим действительное число $x + i \cdot 0 = x$, т.е. $R \subset C$.

При $x = 0$ получим число вида $0 + i \cdot y = iy$, которое называется *чисто мнимым*.

Два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными*.

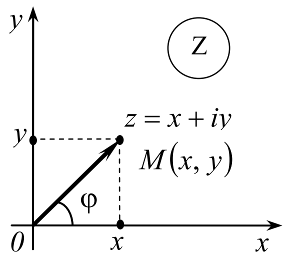


Рис. 8.1

Если на плоскости введена прямоугольная декартова система координат *xOy*, то каждому комплексному числу соответствует точка *M*(*x*, *y*) плоскости или вектор $\overrightarrow{OM}$. И наоборот, каждая точка *M*(*x, y*) плоскости изображает комплексное число $z = x + iy$ (рис. 8.1).

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается Z, ось *Ox* – *действительной осью*, а ось *Oy* – *мнимой осью*.

§ 2. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется число

$$r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и обозначается $r = |z|$.

Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом комплексного числа* и обозначается $\varphi = arc\, z$. Аргумент φ комплексного числа может быть найден из системы уравнений (см. рис. 8.1)

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Очевидно, что аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in Z$. *Главное значение аргумента* $\varphi = arc\, z$ выбирается из условий:

$$-\pi < \arg z \le \pi \qquad \text{или} \qquad 0 \le \arg z < 2\pi.$$

Подставим в алгебраическую форму комплексного числа $z = x + iy$ формулы соотношения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Получим формулу $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \tag{8.2}$$

которая называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Обозначив символом $\mathrm{e}^{i\varphi}$ комплексное число

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,,$$

запишем комплексное число (8.2) *в показательной форме* $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$.

Таким образом, комплексное число имеет 3 формы записи:

1. $z = x + iy$ – *алгебраическая форма*,
2. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – *тригонометрическая форма,*
3. $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ – *показательная форма*,

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, $(-\pi < \varphi \le \pi)$.

Формулы Эйлера

Заменяя в формуле

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (8.3)$$

φ на $-\varphi$, получим

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \ . \qquad (8.4)$$

Складывая и вычитая равенства (8.3) и (8.4), находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \ .$$

Формулы (8.3) и (8.4) называются *формулами Эйлера*. Эти формулы связывают показательную и тригонометрические функции.

Пример 8.1. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить точками и векторами на комплексной плоскости: **а)** $z_1 = 2 - \sqrt{12}i$, **б)** $z_2 = -4$.

Решение. а) Действительная и мнимая части комплексного числа равны $\quad x = \operatorname{Re} z_1 = 2, \qquad y = \operatorname{Im} z_1 = -\sqrt{12}$

Найдем модуль и аргумент z_1:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{12})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{12}}{4} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, представление комплексного числа z_1 в тригонометрической и показательной формах имеет вид:

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 4(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \quad \text{и} \quad z_1 = re^{i\varphi} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

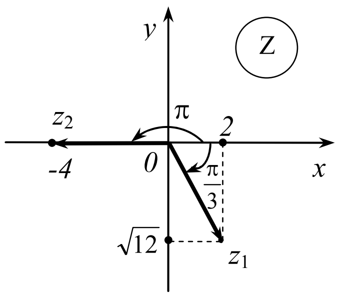


Рис. 8.2

б) $z_2 = -4$.

$$x = \operatorname{Re} z_2 = -4, \qquad y = \operatorname{Im} z_2 = 0,$$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{-4}{4} = -1, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{0}{4} = 0$$

$\Rightarrow \varphi = \pi.$ Таким образом,

$$z_2 = 4(\cos\pi - i\sin\pi) = 4e^{i\pi}.$$

Числа z_1 и z_2 изображены на рис. 8.2.

§ 3. Действия над комплексными числами

Если комплексные числа заданы в алгебраической форме $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то операции сложения, вычитания, умножения и деления этих чисел выполняются по следующим правилам:

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

2. $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$,

3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$,

4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 - i^2y_2^2} =$

$= \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$,

при этом $z_2 \neq 0$.

Пример 8.2. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 5 + i, \ z_2 = -2 + 3i, \ z_3 = 2 - i.$$

Вычислить: 1) $z_1z_2 + z_3^3$; 2) $z_3^2 + \dfrac{z_1}{z_2}$; 3) $z_1^2 - \bar{z}_2z_3$.

Решение.

1) Последовательно вычислим $z_1z_2 + z_3^3$:

$z_1 \cdot z_2 = (5+i)(-2+3i) = -10 - 2i + 15i + 3i^2 = -10 + 13i - 3 = -13 + 13i$;

$z_3^3 = (2-i)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$.

Тогда $z_1z_2 + z_3^3 = -13 + 13i + 2 - 11i = -11 + 2i$.

2) Аналогично вычисляем $z_3^2 + \dfrac{z_1}{z_2}$:

$z_3^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i.$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{-2+3i} = \frac{(5+i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-10-2i-15i-3i^2}{(-2)^2-(3i)^2} = \frac{-7-17i}{4+9} =$$

$$= \frac{-7-17i}{13} = -\frac{7}{13} - \frac{17}{13}i;$$

Тогда $z_3^2 + \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{7}{13} - \dfrac{17}{13}i + 3 - 4i = \dfrac{-7+39}{13} + \dfrac{-17-52}{13}\, i = \dfrac{32}{13} - \dfrac{69}{13}i$.

3) Вычисляем $z_1^2 - \bar{z}_2 z_3$:

$$z_1^2 = (5+i)^2 = 25 + 10i + i^2 = 24 + 10i;$$

$$\bar{z}_2 z_3 = (-2-3i)(2-i) = -4 + 2i - 6i + 3i^2 = -7 - 4i \; .$$

Тогда $z_1^2 - \bar{z}_2 z_3 = 24 + 10i - (-7 - 4i) = 24 + 10i + 7 + 4i = 31 + 14i$.

Операции умножения и деления удобно проводить и над числами, заданными в тригонометрической или показательной формах (см.[1], гл. VII, § 2,3).

§ 4. Применение комплексных чисел в электротехнике

Рассмотрим синусоидальный ток, закон изменения которого во времени описывается формулой

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi),$$

где I_m – *амплитуда* тока, характеризует максимальное значение тока, ω – *угловая частота*, $\omega t + \psi$ – *фаза*, характеризует состояние колебания в момент времени t, ψ – *начальная фаза*.

График тока дан на рис. 8.3.

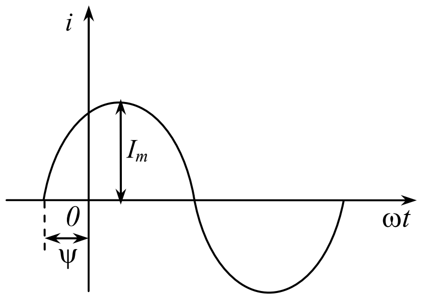


Рис. 8.3

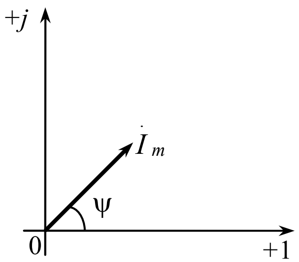


Рис. 8.4

При расчете цепей синусоидального тока используется также понятие *действующего значения тока*

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} .$$

Для облегчения расчетов в электротехнике синусоидальный ток принято изображать вектором (или точкой) на комплексной плоскости

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{\psi j} \qquad (j = \sqrt{-1}), \tag{8.5}$$

который называется *комплексной амплитудой* (рис. 8.4). (обратите внимание на обозначения осей координат!). Модуль этого вектора равен амплитуде I_m, а аргумент – начальной фазе ψ тока.

Если комплексную амплитуду разделить на $\sqrt{2}$, то получим *комплексное действующее значения тока*

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{\psi j} .$$

Зная комплексную амплитуду или комплексное действующее значение синусоидальной величины, можно осуществить обратный переход и записать выражение для мгновенного значения этой величины.

Пример 8.3. Ток меняется по закону $i = 10\sin(\omega t + 120^0)$ А. Найти комплексную амплитуду тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

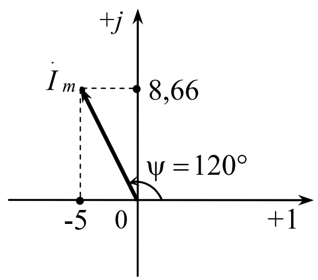


Рис. 8.5

Решение. Из условия находим амплитуду I_m и начальную фазу ψ тока:

$I_m = 10, \qquad \psi = 120^0$.

По формуле (8.5) находим комплексную амплитуду:

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{\psi j} = 10 \cdot e^{120^0 j} =$$

$$= 10(\cos 120^0 + j \sin 120^0) =$$

$$= 10(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = -5 + 8{,}66j \text{ А}.$$

Комплексная амплитуда изображена на рис. 8.5.

Пример 8.4. Задано комплексное действующее значение тока $\dot{I} = 10 - 10j$ А. Записать выражение для его мгновенного значения.

Решение. Найдем действующее значение I тока как модуль комплексного действующего значения $\dot{I}$ тока:

$$I = |\dot{I}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2} = 14{,}14 \text{ А}.$$

Амплитуда I_m тока вычисляется по формуле

$$I_m = I \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20 \text{ А}.$$

Определим начальную фазу ψ как аргумент комплексного числа $\dot{I}$ из уравнения $\qquad \mathrm{tg}\psi = -\dfrac{10}{10} = -1$.

Поскольку число $\dot{I} = 10 - 10j$ расположено в четвертой четверти, то $\psi = -45^0$. Записываем выражение для мгновенного значения синусоидального тока:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = 20\sin(\omega t - 45^0) \text{ А}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$.
Найти число $z = \dfrac{(z_1 + z_3) \cdot \bar{z}_2}{z_3}$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные числа:
а) $z_1 = 2 - 2i$; **б)** $z_2 = -i$; **в)** $z_3 = \sqrt{3} + i$.

3. Решить уравнения
а) $x^2 + 4x + 5 = 0$; **б)** $x^2 + 9 = 0$.

4. Ток меняется по закону $i = 90\sin(\omega t - \dfrac{5\pi}{6})$ А.Найти комплексную амплитуду $\dot{I}$ тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №8

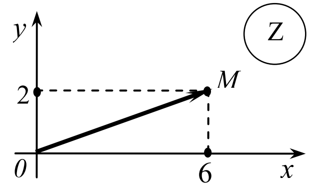
1⁰. Найти значение выражения $(2 + 6i) + (-5 - 9i)$.

2⁰. Действительной частью комплексного числа $(-3 + 2i)$ является число
а) 2; **б)** 3; **в)** -3; **г)** -1.

3⁰. Какое число будет сопряженным числу $5 - 6i$?
а) $5 - 6i$; **б)** $5 + 6i$; **в)** $-5 - 6i$; **г)** $-5 + 6i$.

4. Как называется число вида $-10i$?
а) действительным числом; **б)** отрицательным числом;
в) неполным комплексным числом; **г)** чисто мнимым числом

5. Какое комплексное число изображается точкой M?



а) $2 - 6i$; **б)** $2 + 6i$;
в) $6 - 2i$; **г)** $6 + 2i$.

6. Какую из форм записи комплексного числа называют алгебраической?
а) $z = x + iy$; **б)** $z = re^{i\varphi}$;
в) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; **г)** $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

7. Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется число
а) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; **б)** $r = |x| + |y|$;
в) $r = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; **г)** $r = \sqrt{x^2 - y^2}$.

8. Если тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z = 4(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3})$, то в показательной форме это число имеет вид
а) $z = 2 - \sqrt{12}i$; **б)** $z = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$; **в)** $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$; **г)** $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

9*. Решите уравнение $x^2 + 4 = 0$.

10*. Аргумент комплексного числа $z = -1 - \sqrt{3}i$ равен
а) $\dfrac{\pi}{3}$; **б)** $-\dfrac{2}{3}\pi$; **в)** $-\dfrac{\pi}{3}$; **г)** $\dfrac{\pi}{6}$.

Модуль 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную (x), неизвестную функцию (y) и ее производную (y'). Общий вид ДУ 1-го порядка

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (9.1)$$

Если уравнение (9.1) разрешимо относительно y', то его можно переписать в *нормальной форме*

$$y' = f(x, y). \qquad (9.1')$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, уравнение (9.1′) можно переписать в *дифференциальной форме*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (9.1'')$$

Например, уравнение $xy' + y = 0$ можно записать в нормальной форме следующим образом: $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Представив в последнем уравнении y' в виде отношения двух дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$, перепишем это уравнение в дифференциальной форме:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \Rightarrow xdy = -ydx \Rightarrow ydx + xdy = 0.$$

Решением ДУ называется любая функция $y = \varphi(x)$, определенная на интервале (a, b) и обращающая на этом интервале уравнение в тождество.

Общим решением ДУ 1-го порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, которая при любом значении постоянной c является решением этого уравнения.

Если общее решение ДУ задано неявно уравнением $\Phi(x, y, c) = 0$, то оно называется *общим интегралом ДУ*.

Решение, которое получается из общего решения при фиксированном значении постоянной c, называется *частным решением ДУ*.

График решения ДУ называется *интегральной кривой*.

Например, общим решением ДУ $y' = 2x$ является функция $y = x^2 + c$, где c – произвольная постоянная. При $c = 1$ получим частное решение $y = x^2 + 1$. Интегральными кривыми уравнения является семейство парабол $y = x^2 + c$.

Задача Коши для ДУ 1-го порядка: найти частное решение ДУ (9.1), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Геометрически задача Коши означает, что из множества интегральных кривых выбирается та, которая проходит через точку (x_0, y_0).

Теорема Коши (о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка)**.** Если в ДУ $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная f'_y непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Точки области D, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, называются *особыми точками ДУ*.

§ 2. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения

1. ДУ с разделяющимися переменными.

Уравнение в нормальной форме вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad (9.2)$$

называется ДУ с *разделяющимися переменными*.

В дифференциальной форме ДУ с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0.$$

Представляя y' в виде $y' = \dfrac{dy}{dx}$ перепишем уравнение (9.2) следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Далее *разделим переменные*, т.е. используя свойства пропорций, соберем слева функции, содержащие только переменную x, а справа – функции, содержащие переменную y:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx\,.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим общий интеграл ДУ:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c\,.$$

Пример 9.1. Найти частное решение ДУ

$$xy' + y = 0\,, \tag{9.3}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Решение. Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и преобразуем уравнение

$$\frac{xdy}{dx} + y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -y\,.$$

Разделив переменные, получим уравнение $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя обе части последнего уравнения, запишем общий интеграл ДУ:

$$\ln|y| = -\ln|x| + c\,. \tag{9.4}$$

Поскольку c – произвольная постоянная, то мы можем взять ее в *логарифмическом виде*, т.е. положить $c = \ln|C|$. Тогда решение (9.4) примет вид

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|\,.$$

Воспользовавшись свойством логарифмов,перепишем последнее равенство в виде $\ln|y| = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$, откуда $y = \dfrac{C}{x}$ – общее решение ДУ(9.3).

Найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию. Подставив в формулу общего решения x=1 и y = 2, найдем значение постоянной C:

$$2 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 2\,.$$

Следовательно, искомое частное решение ДУ имеет вид $y = \dfrac{2}{x}$.

Замечание. В этом примере и в дальнейшем мы используем следующие свойства логарифмов:

1. $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$;
2. $\ln x - \ln y = \ln\dfrac{x}{y}$;
3. $n \cdot \ln x = \ln x^n$ (n – действительное число).

Пример 9.2. Найти общее решение ДУ

$$\left(x^2+1\right)y' = x(2y-1).$$

Решение. Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и преобразуем уравнение:

$$\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} = x(2y-1), \qquad \frac{dy}{2y-1} = \frac{xdx}{x^2+1}.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения:

$$\int\frac{dy}{2y-1} = \int\frac{xdx}{x^2+1}.$$

Найдем интегралы:

$$\int\frac{dy}{2y-1} = \int\frac{\frac{1}{2}d(2y)}{2y-1} = \frac{1}{2}\int\frac{d(2y-1)}{2y-1} = \frac{1}{2}\ln|2y-1| + c,$$

$$\int\frac{xdx}{x^2+1} = \left|xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)\right| = \int\frac{\frac{1}{2}dx^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c.$$

Таким образом, мы получим решение ДУ в виде

$$\frac{1}{2}\ln|2y-1| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c\,, \text{ или } \ln|2y-1| = \ln\left|x^2+1\right| + \ln|C|,$$

где введено обозначение $2c = \ln|C|$.

Воспользовавшись свойством логарифмов, находим общее решение исходного уравнения:

$$\ln|2y-1| = \ln\left|\left(x^2+1\right)C\right|,\ \ 2y-1 = \left(x^2+1\right)C\,, \text{ или } \ y = \frac{1}{2}\left(1+\left(x^2+1\right)C\right).$$

2. Однородное ДУ.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию

$$f(tx, ty) = f(x, y),\ \text{где } t - \text{параметр}.$$

Однородное ДУ сводится к ДУ с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$y = u(x) \cdot x = u \cdot x, \quad y' = u' \cdot x + u,$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 9.3. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$$

Решение. Обозначив правую часть уравнения $f(x, y) = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$,

находим $$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + \sin\frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} = f(x, y).$$

Следовательно, данное уравнение является однородным.

Для решения этого уравнения применим подстановку $y = u(x) \cdot x = ux$, $y' = u'x + u$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

Уравнение примет вид

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sin\frac{ux}{x}, \quad u'x + u = u + \sin u, \quad u'x = \sin u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \sin u, \quad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}, \quad \int\frac{du}{\sin u} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|tg\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln|c|, \quad tg\frac{u}{2} = cx, \quad u = 2arctg\ cx.$$

Так как $u = \frac{y}{x}$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = 2x \cdot arctg\ cx$.

3. Линейное ДУ.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x), \tag{9.5}$$

где $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ – заданные функции, называется *линейным ДУ* относительно y и y'.

При решении линейного ДУ можно применить *подстановку Бернулли*

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v,$$

$$y' = u'v + uv', \tag{9.6}$$

где $u = u(x), v = v(x)$ - новые неизвестные функции.

Подставив формулы (9.6) в уравнение (9.5), получим

$$u'v + uv' + \mathrm{P}(x) \cdot u \cdot v = \mathrm{Q}(x). \quad 7)$$

Группируем первый и третий члены уравнения и выносим v за скобки: $$v(u' + \mathrm{P}(x) \cdot u) + uv' = \mathrm{Q}(x).$$

Выбираем функцию $u(x)$ таким образом, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} u' + P(x) \cdot u = 0, \\ uv' = Q(x). \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы, находим одно из его частных решений $u(x)$ (здесь полагаем $c = 0$). Подставляя затем $u(x)$ во второе уравнение системы и решая его, находим функцию $v(x)$.

Пример 9.4. Решить дифференциальное уравнение $xy' - 2y - x^2 = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x и перепишем его

$$y' - \frac{2}{x}y = x. \tag{9.8}$$

Получим уравнение вида $y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)$, где $\mathrm{P}(x) = -\frac{2}{x}$, $\mathrm{Q}(x) = x$.

Это линейное ДУ. Применим подстановку

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv', \tag{9.9}$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – новые неизвестные функции.

Подставим формулы (9.9) в уравнение (9.8):

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x.$$

Группируем первый и третий члены и выносим v за скобки:

$$v(u' - \frac{2u}{x}) + uv' = x\ .$$

Приравняем к нулю выражение, стоящее в скобках, и решаем систему уравнений
$$\begin{cases} u' - \dfrac{2u}{x} = 0, \\ uv' = x. \end{cases} \qquad (9.10)$$

Первое уравнение системы (9.10) является уравнением с разделяющимися переменными. Найдем одно из его решений:

$$u' = \frac{2u}{x}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x}; \quad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u} = 2\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|u| = 2\ln|x|;$$

$\ln|u| = \ln x^2$, $u = x^2$. Подставляя $u = x^2$ во второе уравнение системы (9.10), находим функцию v:

$$x^2 \cdot v' = x; \quad v' = \frac{1}{x}; \quad v = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c\ .$$

Таким образом, получим общее решение исходного уравнения

$$y = u \cdot v = x^2\left(c + \ln|x|\right).$$

Замечание. Уравнение вида $x' + \mathrm{P}(y)x = \mathrm{Q}(y)$ называется *линейным ДУ* относительно x и x'. При его решении применяют подстановку:

$$x = u(y) \cdot v(y) = u \cdot v\ , \qquad x' = u'v + uv'\ .$$

4. Уравнение Бернулли.

Уравнением Бернулли называется ДУ вида

$$y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)y^n\ , \qquad (9.11)$$

где $n \neq 0, n \neq 1$ (при $n = 0$ уравнение (9.11) является линейным, а при $n = 1$ – уравнением с разделяющимися переменными).

Так же, как и линейное, уравнение Бернулли можно решать с помощью подстановки $y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ или свести к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{1-n}$.

Пример 9.5. Найти общее решение ДУ $y' + 4y = e^{-2x}\sqrt{y}.$

Решение. Это уравнение Бернулли вида $y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)y^n$, где $\mathrm{P}(x) = 4$, $\mathrm{Q}(x) = e^{-2x}$, $n = \dfrac{1}{2}$.

Сделаем подстановку

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v\ , \qquad y' = u'v + uv'\ .$$

Уравнение примет вид

$$u'v + uv' + 4uv = e^{-2x}\sqrt{uv}, \qquad v\left(u' + 4u\right) + uv' = e^{-2x}\sqrt{uv}.$$

Приравняем выражение в скобках к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} u' + 4u, \\ uv' = e^{-2x}\sqrt{uv}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы, находим функцию u:

$$u' + 4u = 0, \quad u' = -4u, \quad \frac{du}{dx} = -4u, \quad \frac{du}{u} = -4dx,$$

$$\int \frac{du}{u} = -4dx, \ \Rightarrow \ln|u| = -4x, \quad u = e^{-4x}.$$

Подставив $u = e^{-4x}$ в уравнение $uv' = e^{-2x}\sqrt{uv}$, получим уравнение

$$\sqrt{u}v' = e^{-2x}\sqrt{v}, \ \sqrt{e^{-4x}}v' = e^{-2x}\sqrt{v}, \ e^{-2x}v' = e^{-2x}\sqrt{v}, \ v' = \sqrt{v}.$$

Далее разделяем переменные и находим функцию v:

$$\frac{dv}{dx} = \sqrt{v}, \quad \frac{dv}{\sqrt{v}} = dx \Rightarrow 2\sqrt{v} = x + C, \ v = \frac{1}{4}\left(x + C\right)^2.$$

Значит, общее решение уравнения имеет вид

$$y = u \cdot v = \frac{1}{4}e^{-4x}\left(x + C\right)^2.$$

Пример 9.6. Определить тип ДУ 1-го порядка и указать метод его решения.

а) $\left(x + xy^2\right)y' = y + x^2y$; **б)** $2xyy' = x^2 + y^2$; **в)** $x^2y' = xy + 2.$

Решение. а) В уравнении $\left(x + xy^2\right)y' = y + x^2y$ вынесем общие множители за скобки: $x\left(1 + y^2\right)y' = y\left(1 + x^2\right)$.

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. При его решении заменяем $y' = \dfrac{dy}{dx}$, разделяем переменные и интегрируем:

$$x\left(1 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = y\left(1 + x^2\right), \ \frac{1 + y^2}{y}dy = \frac{1 + x^2}{x}dx\ ,$$

$$\int \frac{1 + y^2}{y}dy = \int \frac{1 + x^2}{x}dx\ .$$

б) В уравнении $2xyy' = x^2 + y^2$ правая часть такова, что ее нельзя представить в виде произведения, а затем разделить переменные.

Разрешим уравнение относительно производной

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Обозначим $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$. Находим

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2tx \cdot ty} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = f(x, y).$$

Следовательно, уравнение является однородным ДУ. Для его решения применим подстановку

$$y = u \cdot x, \quad y' = u' \cdot x + u,$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

Кроме этого, уравнение $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ можно записать в виде

$$y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} \text{ или } y' - \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}, \tag{9.12}$$

Уравнение (9.12) является уравнением Бернулли вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, где $P(x) = -\dfrac{1}{2x}$, $Q(x) = \dfrac{x}{2}$, $n = -1$.

Это уравнение можно решать с помощью подстановки $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – новые неизвестные функции.

в) Разрешим уравнение $x^2y' = xy + 2$ относительно производной и преобразуем его:

$$y' = \frac{xy + 2}{x^2}, \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{2}{x^2}, \quad y' - \frac{y}{x} = \frac{2}{x^2}. \tag{9.13}$$

Уравнение (9.13) является линейным уравнением $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, $Q(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

Это уравнение можно решать с помощью подстановки

$$y = u \cdot v, \; y' = u'v + uv',$$

где $u = u(x), v = v(x)$ - новые неизвестные функции.

§ 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{9.14}$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, а y', y'' - первая и вторая производные этой функции.

Если уравнение (9.14) разрешимо относительно y'', то его можно записать в виде

$$y'' = f(x, y, y') \tag{9.15}$$

Общим решением ДУ 2-го порядка называется функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, которая при любых значениях постоянных c_1, c_2 является решением этого уравнения.

Решение, которое получается из общего решения при фиксированных значениях постоянных c_1, c_2, называется *частным решением ДУ*.

Задача Коши для ДУ 2-го порядка: найти частное решение ДУ (9.14), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Геометрически задача Коши означает, что из множества интегральных кривых выбирается та, которая проходит через точку $(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке угловой коэффициент касательной y'_0.

Теорема Коши (о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка). Если в ДУ $y'' = f(x, y, y')$ функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные $f'_y, f''_{y'}$ непрерывны в некоторой области D пространства, то для любой точки $(x_0; y_0; y'_0) \in D$ существует единственное решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

§ 4. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка

Рассмотрим некоторые частные случаи дифференциальных уравнений второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$.

1. ДУ второго порядка, не содержащие явно *y* и *y'*.

Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(x). \qquad (9.16)$$

Последовательно дважды интегрируя обе части уравнения (9.16), находим общее решение ДУ

$$y' = \int f(x)dx + c_1 = \varphi_1(x) + c_1,$$

$$y = \int \varphi_1(x)dx + c_1 x + c_2 = \varphi_2(x) + c_1 x + c_2.$$

Пример 9.7. Найти частное решение ДУ $y'' = 4\cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Дважды интегрируя, находим

$$y' = \int 4\cos 2x dx = 2\sin 2x + c_1,$$

$$y = \int (2\sin 2x + c_1)dx + c_2 = 2\int \sin 2x dx + c_1 \int dx + c_2 = -\cos 2x + c_1 x + c_2$$

Таким образом, получим общее решение ДУ:

$$y = -\cos 2x + c_1 x + c_2.$$

Используя начальные условия, найдем частное решение уравнения

$$y(0) = -\cos 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 2,$$

$$y'(0) = 2\sin 0 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = -\cos 2x + x + 2.$$

2. ДУ второго порядка, не содержащие явно функцию *y*.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y', y'') = 0. \qquad (9.17)$$

Применяя подстановку

$$y' = z(x), \quad y'' = z'(x),$$

получим дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$F(x, z, z') = 0.$$

Решив это уравнение, найдем функцию $z = \varphi(x, c_1)$ – общее решение.

Затем решаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$y' = \varphi(x, c_1),$$

из которого находим искомую функцию $y = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2$.

Пример 9.8. Найти частное решение ДУ $y' - xy'' = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = 3$.

Решение. Это неполное уравнение второго порядка, не содержащее явно искомую функцию *y*.

Порядок этого уравнения можно понизить, положив $y' = z(x) \Rightarrow y'' = z'(x)$. Уравнение после подстановки примет вид:

$$z - xz' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad xz' = z - 1.$$

Разделим переменные и найдем функцию $z = z(x)$:

$$x\frac{dz}{dx} = z - 1, \quad \frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{z-1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z-1| = \ln|x| + \ln|c_1| \Rightarrow \ln|z-1| = \ln|xc_1| \Rightarrow z - 1 = xc_1$$

$$z = xc_1 + 1.$$

Возвращаясь к переменной *y*, получим уравнение первого порядка

$$y' = xc_1 + 1.$$

Прежде чем интегрировать это уравнение, целесообразно определить значение постоянной c_1, используя заданные начальные условия $y'(1) = 3$: $3 = 1 \cdot c_1 + 1 \Rightarrow c_1 = 3 - 1 = 2$.

Подставляя $c_1 = 2$ в уравнение $y' = xc_1 + 1$, получим уравнение $y' = 2x + 1$, откуда находим

$$y = \int (2x+1)dx = \frac{2x^2}{2} + x + c_2 = x^2 + x + c_2.$$

Наконец, используя начальные условия $y(1) = 0$, определим c_2: $0 = 1 + 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -2$.

Получаем искомое частное решение: $y = x^2 + x - 2$.

Замечание. При отыскании частных решений уравнений высших порядков нет необходимости сначала находить общее решение, а лишь затем определять значение всех постоянных. Лучше определять значения каждой постоянной немедленно после того, как она появляется в процессе решения.

3. ДУ второго порядка, не содержащие явно независимую переменную.

При решении уравнения вида

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{9.18}$$

применяем подстановку

$$y' = p(y) = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} . \tag{9.19}$$

Получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F\left(y,\ p,\ p\cdot\frac{dp}{dy}\right) = 0 .$$

Найдем общее решение этого уравнения $p = \varphi(y, c_1)$ и подставим $p = \frac{dy}{dx}$. Затем решаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $y' = \varphi(y, c_1)$, из которого находим искомую функцию: $\int\frac{dy}{\varphi(y,c_1)} = x + c_2$.

Пример 9.9. Найти частное решение уравнения $2yy'' = (y')^2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(-1) = 4;\ y'(-1) = 1$.

Решение. Данное уравнение второго порядка не содержит явно независимую переменную. Применим подстановку $y' = p(y) = p$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция переменной y.

Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$ и уравнение примет вид

$$2yp\frac{dp}{dy} = p^2; \qquad 2yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0; \qquad p\left(2y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$$

Если приравнять нулю первый множитель, то получаем: $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$. Но это решение не удовлетворяет начальному условию $y'(-1) = 1$, а значит является посторонним.

Приравняем к нулю второй множитель:

$$2y\frac{dp}{dy} - p = 0; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y}; \qquad \ln|p| = \frac{1}{2}\ln|y| + \ln|c_1|;$$

$$p = c_1\sqrt{y} \quad \text{или} \quad y' = c_1\sqrt{y}.$$

Используя начальные условия $y = 4, y' = 1$ при $x = -1$, находим c_1:

$$1 = c_1\sqrt{4}; \qquad c_1 = \frac{1}{2}.$$

Далее решаем уравнение $y' = \frac{1}{2}\sqrt{y}$:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}dx; \qquad 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + c_2 .$$

Теперь определим значение c_2 из условия $y = 4$ при $x = -1$:

$$2\sqrt{4} = \frac{1}{2}(-1) + c_2; \quad 4 = c_2 - \frac{1}{2}; \quad c_2 = \frac{9}{2}.$$

Тогда

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}; \quad \sqrt{y} = \frac{1}{4}(x+9) ,$$

откуда получаем искомое частное решение

$$y = \frac{1}{16}(x+9)^2 .$$

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) , \tag{9.20}$$

где $a_1(x), \ldots , a_n(x),\ f(x)$ – некоторые заданные функции.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (9.20) называется *неоднородным*.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (9.20) называется *однородным*.

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ 2-го порядка
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (9.21)$$
и соответствующее ему однородное уравнение
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0\,. \qquad (9.22)$$
Будем предполагать, что функции $a_1(x), a_2(x), f(x)$ непрерывны. Это обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши.

Функции y_1 и y_2 называются *линейно зависимыми* (л. з.) на интервале (a, b), если $\frac{y_1}{y_2} \equiv \text{const}$ для любого $x \in (a, b)$.

Если $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$ для любого $x \in (a, b)$, то функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми* (л. н. з.) на этом интервале.

Например, функции

1) x и x^2 – л. н. з., т. к. $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \neq \text{const}$;

2) x и $2x$ – л. з., т. к. $\frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \equiv \text{const}$;

3) $\sin x$ и $\cos x$ – л. н. з., т. к. $\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tg} x \neq \text{const}$.

Любые два линейно независимые решения линейного однородного ДУ 2-го порядка называются *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема 1 (о структуре общего решения линейного однородного ДУ 2-го порядка). Если y_1 и y_2 – фундаментальная система решений однородного уравнения (9.22), то общее решение этого уравнения имеет вид
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2\,,$$
где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Теорема 2 (о структуре общего решения линейного неоднородного ДУ). Общее решение y линейного неоднородного ДУ (9.21) есть сумма общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения (9.22) и частного решения y^* неоднородного уравнения (9.21), т. е.
$$y = \tilde{y} + y^*.$$

§ 6. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное ДУ 2-го порядка
$$y'' + py' + qy = 0\,, \qquad (9.23)$$
где p и q – некоторые действительные числа.

Будем искать частное решение ДУ (9.23) в виде $y = \mathrm{e}^{kx}$, где $k = \text{const}$. Тогда $y' = k\mathrm{e}^{kx}$, $y'' = k^2\mathrm{e}^{kx}$.

Подставляя y, y', y'' в уравнение (9.23), приходим к уравнению
$$k^2\mathrm{e}^{kx} + pk\mathrm{e}^{kx} + q\mathrm{e}^{kx} = 0\,. \qquad (9.24)$$
Разделив обе части (9.24) на e^{kx} $(\mathrm{e}^{kx} \neq 0)$, получим *характеристическое уравнение* для данного дифференциального уравнения:
$$k^2 + pk + q = 0\,. \qquad (9.25)$$
Квадратное уравнение (9.25) имеет два корня, k_1 и k_2. Рассмотрим три различных случая.

I. Если $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$ – *действительные*, причем $\boldsymbol{k_1} \neq \boldsymbol{k_2}$, то общее решение уравнения записывается в виде
$$y = c_1\mathrm{e}^{k_1 x} + c_2\mathrm{e}^{k_2 x}\,.$$
II. Если $\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{k_2}$, то общее решение ДУ имеет вид
$$y = \mathrm{e}^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)\,.$$
III. Если $\boldsymbol{k_1} = \alpha + i\beta$ *и* $\boldsymbol{k_2} = \alpha - i\beta$ – *комплексные числа*, то общее решение имеет вид
$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)\,,$$
где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Пример 9.10. Найти общее решение ДУ $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - k - 6 = 0$ и найдем его корни:
$$D = 1^2 - 4(-6) = 25\,,\ k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}\,,\ k_1 = -2, k_2 = 3.$$
Так как $k_1 \neq k_2$ – действительные различные, то общее решение ДУ имеет вид $y = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{3x}$.

Пример 9.11. Найти частное решение ДУ

$$4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$4k^2 - 4k + 1 = 0$$

и найдем его корни: $D = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 + c_2 x).$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}(c_1 + c_2 x) + e^{\frac{x}{2}} c_2 ,$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} e^0 (c_1 + c_2 \cdot 0) = 2, \\ \frac{1}{2} e^0 (c_1 + c_2 \cdot 0) + e^0 c_2 = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2, \\ \frac{1}{2} c_1 + c_2 = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение ДУ имеет вид

$$y = e^{\frac{x}{2}}(2 + 3x).$$

Пример 9.12. Найти общее решение ДУ

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 4k + 13 = 0.$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i, \quad k_1 = -2 + 3i, \quad k_2 = -2 - 3i.$$

Общее решение ДУ запишется в виде

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).$$

Аналогично строится общее решение для однородного дифференциального уравнения порядка $n > 2$.

§ 7. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. (Метод неопределенных коэффициентов)

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{9.26}$$

где p и q – некоторые действительные числа.

Соответствующее ему однородное ДУ имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{9.27}$$

характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Общее решение уравнения (9.26) на основании теоремы 2 из § 5 будем искать в виде

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

где $\tilde{y}$ – общее решение однородного ДУ (9.27), y^* – частное решение неоднородного ДУ (9.26).

Рассмотрим случаи, когда вид правой части $f(x)$ уравнения (9.26) позволяет найти частное решение y^* *методом неопределенных коэффициентов.*

1) Пусть $\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)}$,

где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен степени n.

Частное решение уравнения (9.26) ищем в виде

$$\boldsymbol{y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)},$$

где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с α ($r = 0$, 1 или 2), $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами:

$$Q_0(x) = A, \quad Q_1(x) = Ax + B, \quad Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ и т. д.}$$

2) Пусть $\boldsymbol{f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x}$,
где M и N – некоторые числа.

Частное решение ищем в виде

$$\boldsymbol{y^* = x^r (A\cos\beta x + B\sin\beta x)},$$

где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с βi ($r = 0$ или 1), A и B – неопределенные коэффициенты.

3) Рассмотрим общий случай, когда

$$\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x} (P_l (x)\cos\beta x + R_m (x)\sin\beta x)},$$

где $P_l(x)$ и $R_m(x)$ – многочлены. Частное решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$\boldsymbol{y^* = x^r e^{\alpha x} (Q_n (x)\cos\beta x + S_n (x)\sin\beta x)},$$

где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с $\alpha + i\beta$ ($r = 0$ или 1), $Q_n(x), S_n(x)$ – многочлены степени $n = \max(l, m)$ с неопределенными коэффициентами.

Для того, чтобы найти неопределенные коэффициенты, находим $y^{*'}, y^{*''}$ и подставляем $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в левую часть уравнения (9.26). Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях, составляем систему линейных уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов. Решив полученную систему, найдем решение y^*.

Пример 9.13. Найти общее решение ДУ $y'' - 4y = (4x + 2)e^{2x}$.

Решение. Найдем решение соответствующего однородного ДУ

$$y'' - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 4 = 0$ имеет 2 различных действительных корня $k_1 = 2$, $k_2 = -2$.

Общее решение однородного ДУ имеет вид

$$\tilde{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Найдем частное решение y^* неоднородного ДУ. Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{2x}(4x + 2) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

где $\alpha = 2$, $n = 1$. Так как $\alpha = k_1$, $\alpha \neq k_2$, то число совпадений $r = 1$. Поэтому частное решение y^* ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x) = x^1 e^{2x} Q_1(x) = x e^{2x}(Ax + B) \qquad \text{или}$$

$$y^* = e^{2x}(Ax^2 + Bx),$$

$$y^{*'} = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax + B),$$

$$y^{*''} = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx) + 2e^{2x}(2Ax + B) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} 2A,$$

Подставив $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в исходное ДУ, получим уравнение

$$e^{2x}(4Ax + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A) - 4e^{2x}(Ax^2 + Bx) = (4x + 2)e^{2x}.$$

Разделив обе части уравнения на e^{2x}, получим

$$4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A - 4Ax^2 - 4Bx = 4x + 2.$$

Приводя подобные члены, приходим к уравнению

$$8Ax + 4B + 2A = 4x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения A и B:

$$\begin{array}{c|l} x & 8A = 4, \\ x^0 & 4B + 2A = 2, \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, частное решение неоднородного ДУ имеет вид

$$y^* = x e^{2x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} x e^{2x}(2x + 1).$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения

$$y = \tilde{y} + y^* = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x(2x + 1)e^{2x}.$$

Пример 9.14. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \cos 2x.$$

Решение. Запишем соответствующее однородное ДУ

$$y'' + y = 0 .$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет 2 комплексно-сопряженных корня $k_1 = i, k_2 = -i$.

Общее решение однородного уравнения

$$\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

Правая часть уравнения $f(x) = \cos 2x = M \cos \beta x + N \sin \beta x$, где $M = 1$, $N = 0$, $\beta = 2$. Так как $\beta i = 2i$ и $\beta i \neq k_1$, $\beta i \neq k_2$, то число совпадений $r = 0$.

Частное решение неоднородного ДУ ищем в виде

$$y^* = x^r (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad \text{или}$$

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x, \qquad y^{*'} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$

$$y^{*''} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Подставим y^*, $y^{*''}$ в исходное ДУ:

$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x = \cos 2x .$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получим систему

$$\begin{array}{c|l} \cos 2x & -3A = 1 \\ \sin 2x & -3B = 0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{3}, B = 0.$$

Следовательно, $y^* = -\frac{1}{3} \cos 2x$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Общее решение неоднородного ДУ имеет вид:

$$y = \tilde{y} + y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x .$$

Пример 9.15. Указать вид частного решения y^* линейного неоднородного ДУ второго порядка $y'' - 4y' = f(x)$, если правая часть уравнения $f(x)$ имеет вид

а) $f(x) = x^2 e^{2x}$; **б)** $f(x) = 3x - 1$; **в)** $f(x) = 2 \sin 4x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k(k-4) = 0 \Rightarrow$$

$k_1 = 0, k_2 = 4$ – характеристические числа.

Проанализируем правую часть ДУ.

а) $f(x) = x^2 e^{2x} = \mathrm{P}_n(x) e^{\alpha x}$, где $\mathrm{P}_n(x) = x^2$, $n = 2$, $\alpha = 2$.

Поскольку $k_1 \neq \alpha$ и $k_2 \neq \alpha$, то число совпадений $r = 0$.

Поэтому частное решение y^* ДУ ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} \mathrm{Q}_n(x) = x^0 e^{2x} \mathrm{Q}_2(x) = e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right),$$

где A, B, C – действительные числа, которые будут определены далее.

б) $f(x) = 3x - 1 = \mathrm{P}_n(x) e^{\alpha x}$, где $\mathrm{P}_n(x) = 3x - 1$, $n = 1$, $\alpha = 0$.

Поскольку $k_1 = \alpha = 0$, $k_2 \neq \alpha$, то число совпадений $r = 1$.

Следовательно, частное решение y^* ДУ ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} \mathrm{Q}_n(x) = x^1 e^{0x} \mathrm{Q}_1(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx ,$$

где A, B – действительные числа, которые будут определены далее.

в) $f(x) = 2 \sin 4x = M \cos \beta x + N \sin \beta x$, где $M = 0$, $N = 2$, $\beta = 4$.

Поскольку $\beta i = 4i$, а $k_1 \neq \beta i$, $k_2 \neq \beta i$, то число совпадений $r = 0$.

Следовательно, частное решение y^* ДУ ищем в виде

$$y^* = x^r \left(A \cos \beta x + B \sin \beta x\right) = x^0 \left(A \cos 4x + B \sin 4x\right) =$$
$$= A \cos 4x + B \sin 4x ,$$

где A, B – действительные числа, которые будут определены далее.

§ 8. Системы дифференциальных уравнений

Система уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

называется *нормальной системой дифференциальных уравнений*. Число уравнений, входящих в систему, называется *порядком* этой системы.

Возьмем в качестве независимой переменной t. Пусть $x = x(t), y = y(t)$ – функции этой переменной. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y), \\ \dot{y} = f_2(t, x, y), \end{cases} \tag{9.28}$$

где введены обозначения $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

Решением системы (9.28) на некотором промежутке называется совокупность функций $x(t), y(t)$, которая обращает все уравнения системы на этом промежутке в тождества.

Общим решением системы (9.28) является совокупность функций

$$x = \varphi_1(t, c_1, c_2), \qquad y = \varphi_2(t, c_1, c_2),$$

которая при любых значениях постоянных c_1, c_2 является решением системы.

Решение, которое получается из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением* системы.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (9.28) состоит в нахождении частного решения этой системы $x(t), y(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, где t_0, x_0, y_0 – заданные числа.

Система (9.28) имеет физический смысл и называется *динамической системой*. Она определяет скорость $(\dot{x}, \dot{y})$ движущейся в плоскости материальной точки в любой момент времени t. Решение системы (9.28) $x = x(t), y = y(t)$ – это параметрическое уравнение траектории движения точки. Начальные условия задают положение материальной точки в момент времени t_0.

Одним из основных методов решения систем дифференциальных уравнений является *метод исключения неизвестных*, с помощью которого система дифференциальных уравнений (9.28) сводится к дифференциальному уравнению второго порядка от одной неизвестной функции. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 9.16. Найти решение системы ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} \tag{9.29}$$

Решение. Решение системы будем проводить в несколько этапов.

1) Выразим из первого уравнения системы y:

$$y = 2x - \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = 2\dot{x} - \ddot{x}.. \tag{9.30}$$

2) Подставим (9.30) во второе уравнение системы и преобразуем его: $\quad 2\dot{x} - \ddot{x} = -x + 2(2x - \dot{x}), \quad 2\dot{x} - \ddot{x} = -x + 4x - 2\dot{x},$

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0 \tag{9.31}$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $x = x(t)$.

3) Решая уравнение (9.31), находим функцию x: $\quad \ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$,

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, k_2 = 3,$$

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \tag{9.32}$$

– общее решение уравнения (9.31).

4) Подставив (9.32) в формулу (9.30), находим функцию y:

$$y = 2(2c_1 e^t + c_2 e^{3t} - (c_1 e^t + 3c_2 e^{3t}) = c_1 e^t - c_2 e^{3t}.$$

Таким образом, получим общее решение системы (9.29):

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{3t}, \\ y = c_1 e^t - c_2 e^{3t}. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решить дифференциальные уравнения

1. $(x+1)dx+\sqrt{y}dy=0$.

2. $xy'=y^2+1$.

3. $(x^2+4)y'=x(y+5)$.

4. $y'=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}$.

5. $y'+2xy=3x^2e^{-x^2}$, $y(0)=0$.

6. $y'+2xy=\frac{x^2}{y^2}$.

7. $y''=6x^2-\sin x$.

8. $y^2y''=(y')^3$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Найти общее решение ДУ второго порядка

9. $y''+2y'-15y=0$.

10. $y''-10y'+25=0$.

11. $y''-4y'+13y=0$.

12. $y''+4y=0$.

13. $y''+4y=x$.

14. $y''-2y'=2e^x$.

15. $y''-4y'+4=\sin 2x$.

16. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=4x+2y,\\ \dot{y}=-3x-y.\end{cases}$$

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №9

1^0. Укажите ДУ с разделяющимися переменными

а) $(x+y)dx+\cos ydy=0$; **б)** $\sin ydy=(x^2+x^2y^2)dx$;

в) $tgydy=(x^2+xy)dx$; **г)** $y'-y=x^3$.

2^0. Укажите дифференциальное уравнение третьего порядка

а) $y''-y'=3$; **б)** $y'''+x=0$; **в)** $y\cdot y'+3x=0$; **г)** $y'+\frac{y}{x}=y^3$.

3. Укажите линейное ДУ первого порядка.

а) $y'=ye^x$; **б)** $y'=\frac{x-y}{3x+5y}$; **в)** $y'=y\cdot x^2+e^x$; **г)** $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{e^y+5}$.

4. Дифференциальное уравнение $y'(x^2+9)=y^3-1$ является

а) дифференциальным уравнением второго порядка;
б) диф. уравнением с разделяющимися переменными;
в) линейным дифференциальным уравнением;
г) однородным дифференциальным уравнением.

5. ДУ вида $2(y')^2=(y-1)y''$ решается с помощью замены

а) $y'=p(x),\ y''=\frac{dp}{dx}$; **б)** $y'=p(y),\ y''=p\frac{dp}{dy}$;

в) $y=u(x)\cdot v(x),\ y'=u'v+uv'$; **г)** $y=x\cdot u,\ y'=u+xu'$.

6. Запишите характеристическое уравнение ДУ $y''+5y=2x$.

7*. Общий интеграл ДУ $\frac{dy}{y+5}=\cos 3xdx$ имеет вид

а) $\ln|y+5|=\frac{1}{3}\sin 3x+c$; **б)** $\frac{1}{5}\ln|y+5|=\frac{1}{3}\sin 3x+c$;

в) $\ln|y+5|=\sin 3x+c$; **г)** $\ln|y+5|=\frac{1}{3}\sin 3x$.

8*. Частное решение y^* дифференциального уравнения $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$ ищется в виде

а) $y^*=e^{3x}$; **б)** $y^*=e^{3x}(\cos x^2+\sin x)$;

в) $y^*=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$; **г)** $y^*=x(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$.

Модуль 10. РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды. Основные понятия

Определение. Пусть $(a_n) = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *числовым рядом*, числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ – членами ряда, а число a_n – n-м членом ряда.

Например, числовыми рядами являются следующие выражения:

$$1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Определение. Сумма конечного числа n первых членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n*-й частичной суммой* данного ряда.

Таким образом,

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
....
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
....

Определение. Если существует конечный предел последовательности (S_n) частичных сумм ряда

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

то ряд называется *сходящимся*, а число S – *суммой* данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если предел последовательности (S_n) не существует или равен бесконечности, то ряд называют *расходящимся*.

Выражение вида

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

представляющее собой числовой ряд, называется n*-ым остатком ряда.*

Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n.$$

Поскольку для сходящегося числового ряда $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0.$$

Например, рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

представляющий собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Вычислим n-ю частичную сумму этого ряда:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right),$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 2(1 - 0) = 2.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма $S = 2$.

Ряд $1 + 2 + 3 + ... + n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ является расходящимся, т.к.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (1 + 2 + 3 + ... + n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1+n}{2} \cdot n = \infty.$$

§ 2. Необходимый признак сходимости ряда

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и его n-ю частичную сумму

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \text{, т. е. } a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Если ряд сходится, то существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (т. е. предел общего члена сходящегося ряда при $n\to\infty$ равен нулю).

Следствие ***(достаточный признак расходимости ряда).*** Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Из выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не обязательно следует сходимость ряда, т.е. оно не является достаточным признаком сходимости ряда.

Например, рассмотрим *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, однако гармонический ряд расходится (доказательство приведено в примере 10.9 на стр. 49).

Пример 10.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Решение. Данный ряд расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7 \neq 0.$$

Здесь мы использовали второй замечательный предел и достаточный признак расходимости ряда.

§ 3. Простейшие свойства числовых рядов

1. Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).

2. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = S_a + S_b.$$

3. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Aa_k$ также сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Aa_k = AS$, где A – const.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Aa_k$ называется произведением ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ на число A.

Замечание. Операции суммирования рядов и умножения ряда на число называются линейными операциями над рядами. Из данных определений вытекает, что линейные операции над рядами реализуются с помощью линейных операций над их членами.

§ 4. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов

Рассмотрим числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами, т. е. $a_n \geq 0$.

Признак сравнения. Если для членов рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ справедливо неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$ для $\forall n \geq n_0$, то:

1) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 10.2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{2^n+n}+\ldots .$$

Решение. Применим признак сравнения.

Так как $\frac{1}{2^n+n}<\frac{1}{2^n}$ для $\forall n\geq 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}<1$, то сходится и заданный ряд.

Предельный признак сравнения. Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$, и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $b_n>0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L,\ \ 0<L<\infty,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

В частности, если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1,$ то удобно воспользоваться знаком эквивалентности и писать $a_n\sim b_n$ при $n\to\infty$.

Например, многочлен степени k

$$P_k(n)=a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n+a_0\sim\ a_k n^k,$$

т.е. многочлен эквивалентен своей старшей степени при $n\to\infty$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{a_k n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n+a_0}{a_k n^k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_{k-1}}{a_k n}+\ldots+\frac{a_1}{a_k n^{k-1}}+\frac{a_0}{a_k n^k}\right)=1+0+\ldots+0+0=1.$$

При применении признаков сравнения для исследования сходимости числовых рядов удобно сравнивать с *обобщенным гармоническим рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$. При $p=1$ получаем *гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Пример 10.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$.

Решение. Применим признак сравнения. Так как $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ как обобщенный гармонический с показателем $p=\frac{3}{2}>1$ сходится, то исходный ряд также сходится.

Здесь можно применить и предельный признак сравнения. Поскольку $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ при $n\to\infty$, то исходный ряд сходится.

Пример 10.4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Решение. Попробуем применить признак сравнения: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n}$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является гармоническим и расходится. Поэтому признак сравнения в данном случае не решает вопрос о сходимости ряда.

Применим предельный признак сравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n}\ \text{ при } n\to\infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как гармонический, а значит исходный ряд также расходится.

Пример 10.5. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\cdot\left(n^2-n+1\right)}.$$

Решение. Применим предельный признак сравнения:

$$\frac{n+2}{(n+1)\cdot\left(n^2-n+1\right)}\sim\frac{n}{n\cdot n^2}=\frac{1}{n^2}\ \text{ при } n\to\infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$. Следовательно, исходный ряд также сходится.

Признак Д’Аламбера. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$, существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Тогда:

1) при $L<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $L>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) при $L=1$ признак Д’Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда. В этом случае сходимость ряда исследуют с помощью других признаков.

Пример 10.6. Исследовать сходимость ряда

$$2+\frac{2^2}{2^4}+\frac{2^3}{3^4}+\frac{2^4}{4^4}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}.$$

Решение. Применим признак Д’Аламбера. Запишем n-ый и $(n+1)$-ый члены ряда:

$$a_n=\frac{2^n}{n^4}, \quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^4}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^4}:\frac{2^n}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^4}{(n+1)^4\cdot 2^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^4=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}=2.$$

Так как $L=2>1$, то данный ряд расходится.

Пример 10.7. Исследовать сходимость ряда

$$3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

($n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ и называется «эн-факториал»).

Решение. Применим признак Д’Аламбера. Запишем n-ый и $(n+1)$-ый члены ряда:

$$a_n=\frac{3^n}{n!}, \quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot3\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)}{(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1))\cdot3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0.$$

Поскольку $L=0<1$, то данный ряд сходится.

Радикальный признак Коши. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$, существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$. Тогда:

1) при $L<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $L>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) при $L=1$ радикальный признак Коши неприменим.

Пример 10.8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{2n+3}\right)^n$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n}{2n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{2n+3}=\lim\frac{5}{2+\frac{3}{n}}=\frac{5}{2}>1,$$

то данный ряд расходится по радикальному признаку Коши.

Интегральный признак Коши. Если функция $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$ монотонно убывает и неотрицательна, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 10.9. Исследовать сходимость *обобщенного гармонического ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, \quad p\in\mathbf{R}.$$

Решение.

1) Если $p\le 0$, то $\dfrac{1}{n^p}\ge 1$ для $\forall n\in\mathbf{N}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{-p}=\infty.$

Так как нарушается необходимое условие сходимости ряда, то в этом случае ряд расходится.

2) Пусть $p>0$.

Обозначим $f(n)=\dfrac{1}{n^p}$ и рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ монотонно убывает и положительна на промежутке $[1;+\infty)$. Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$.

Если $p=1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=\infty,$$

то есть несобственный интеграл расходится.

Если $p>0$ и $p\ne 1$, то

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-p}-1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, & p>1,\\ \infty, & 0<p<1.\end{cases}$$

Следовательно, обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

§ 5. Знакочередующиеся ряды

Определение. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, члены которого имеют разные знаки, называется *знакопеременным.*

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, который является знакоположительным.

Теорема. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

В этой теореме сформулирован достаточный признак сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Определение. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно сходящимся*.

Определение. *Знакочередующимся* называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \qquad (10.1)$$

где a_n, $n=1,2,\ldots$, – числа одного знака.

При исследовании сходимости знакочередующихся рядов применяют признак Лейбница.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ удовлетворяют условиям: **1)** $a_n\ge a_{n+1}$ для $\forall n\in\mathbf{N}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, а его сумма S не превосходит первого члена, т.е. $S\le a_1$.

Следствие: Остаток r_n знакочередующегося ряда удовлетворяет неравенству $|r_n| < a_{n+1}$.

Таким образом, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, если модуль общего члена этого ряда a_n монотонно убывая стремится к нулю ($a_n \downarrow \to 0$ при $n \to \infty$).

Пример 10.10. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$ для $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ (т. е. $\frac{1}{n^2}$ монотонно убывая стремится к нулю при $n \to \infty$), то данный ряд сходится по признаку Лейбница.

Пример 10.11. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд, состоящий из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – это расходящийся гармонический ряд.

Исследуем ряд на условную сходимость. Поскольку $\frac{1}{n}$ монотонно убывая стремится к нулю при $n \to \infty$, то по признаку Лейбница ряд сходится. Следовательно, исходный ряд сходится условно.

§ 6. Степенные ряды

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность функций

$$U_1(x),\ U_2(x), \ldots, U_n(x), \ldots$$

Выражение вида

$$U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

называется *функциональным рядом*, а сумма первых *n* слагаемых

$$S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x)$$

n-ной частичной суммой функционального ряда.

Функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

(если предел существует и конечен) *называется суммой функционального ряда.*

Множество всех значений *x*, для которых ряд сходится, называется *областью сходимости функционального ряда.*

Например, ряд $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ при $|x| < 1$ является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и, следовательно, сходится, причем сумма ряда $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Таким образом, областью сходимости данного функционального ряда является интервал (– 1; 1).

Определение. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (10.2)$$

где a_n $(n \in \mathbf{N})$, x_0 – действительные числа, называется *степенным рядом* по степеням $x - x_0$, а числа a_n – коэффициентами степенного ряда.

При $x_0 = 0$ получаем степенной ряд по степеням x

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Поскольку заменой $x - x_0 = X$ ряд (10.2) можно свести к последнему ряду, то ограничимся рассмотрением таких рядов.

Степенной ряд всегда сходится в точке $x=0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно для любых *x* таких, что $|x| < |x_2|$.

Следствие. Если в точке x_2 степенной ряд расходится, то он расходится для любых x таких, что $|x| > |x_2|$.

Из теоремы Абеля и следствия вытекает, что если степенной ряд сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $|x| < R$ и расходится для всех $|x| > R$. При $x = \pm R$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение. Неотрицательное число R такое, что степенной ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, называют *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R; R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

Если ряд сходится только в точке $x=0$, то $R=0$; если же он сходится для всех действительных x, то $R=\infty$.

Для определения радиуса сходимости степенного ряда используют формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{10.3}$$

Пример 10.12. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$.

Решение. Запишем *n*-й и (*n*+1)-й коэффициенты ряда

$$a_n = n!,\quad a_{n+1} = (n+1)!$$

Радиус сходимости найдем по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

т.е. ряд сходится в единственной точке $x=0$.

Пример 10.13. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\sqrt{n}}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\quad \text{где } a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{n}},\qquad a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n\sqrt{n}} : \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 2$$

Как видно, ряд будет сходиться для тех значений *x*, для которых

$$|x-1| < 2,\ \text{или}\ -2 < x-1 < 2,\ \text{или}\ -1 < x < 3.$$

Таким образом, мы нашли интервал сходимости степенного ряда:

$$-1 < x < 3.$$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-1)^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Полученный ряд является знакочередующимся, его общий член по абсолютному значению монотонно убывает и стремится к нулю при $n\to\infty$. По признаку Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов заключаем, что ряд сходится. Следовательно, значение $x=-1$ принадлежит области сходимости данного ряда.

При $x=3$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-1)^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Это обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p=\frac{1}{2}<1$, который расходится. Следовательно, значение $x=3$ не принадлежит области сходимости данного ряда.

Таким образом, $-1 \le x < 3$ – область сходимости исследуемого ряда.

§ 7. Ряды Тейлора и Маклорена

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится и его сумма $S(x)=f(x)$, то коэффициенты этого ряда определяются по формулам:

$$a_0 = f(x_0),\quad a_1 = f'(x_0),\quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Степенной ряд вида

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0=0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется *рядом Маклорена*.

По определению полагаем $0!=1$.

Если для произвольной бесконечно дифференцируемой функции формально составить ряд Тейлора, то он может и не совпадать с самой функцией $f(x)$.Поэтому важно определить, когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен.

Теорема. Если на интервале $(x_0-R; x_0+R)$ функция $f(x)$ и все ее производные ограничены в совокупности одной и той же константой M, то ее ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ на интервале $(x_0-R; x_0+R)$.

§ 8. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

1. Запишем разложение в ряд Маклорена функции $f(x)=\mathrm{e}^x$.

Так как $f'(x)=\mathrm{e}^x,\ f''(x)=\mathrm{e}^x,\dots, f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$, то

$f'(0)=1,\ f''(0)=1,\ \dots,\ f^{(n)}(0)=1.$

Таким образом, получаем следующее разложение:

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Поскольку $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$, радиус сходимости данного ряда :

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=n+1=\infty,$$

то есть ряд сходится при любых $x\in(-\infty;+\infty)$.

Аналогично можно получить разложения других функций в ряды Маклорена.

2. $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!},$

$x\in(-\infty;+\infty)$.

3. $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},$

$x\in(-\infty;+\infty)$.

4. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1},\quad x\in(-1;\ 1)$.

5. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1;\ 1).$$

6. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, $x\in(-1;\ 1)$.

Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена используется, например, при вычислении приближенных значений функций, определенных интегралов, решении дифференциальных уравнений и др.

Пример 10.14. Функцию $f(x)=\mathrm{e}^{-2x^2}$ разложить в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

в которой заменим x на $\left(-2x^2\right)$.

Получим следующее разложение в ряд Маклорена

$$\mathrm{e}^{-2x^2}=1+\left(-2x^2\right)+\frac{\left(-2x^2\right)^2}{2!}+...+\frac{\left(-2x^2\right)^n}{n!}+...=$$

$$=1-2x^2+\frac{2^2x^4}{2!}+...+\frac{(-1)^n2^nx^{2n}}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^nx^{2n}}{n!},$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

Пример 10.15. Вычислить $\ln 1{,}2$ с точностью $\delta=0{,}001$.

Решение. Воспользуемся разложением

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad -1<x<1 \qquad (10.5)$$

Так как $\ln 1{,}2=\ln(1+0{,}2)$, и $-1<0{,}2<1$, то полагая в формуле (10.5) $x=0{,}2$ находим

$$\ln 1{,}2=0{,}2-\frac{(0{,}2)^2}{2}+\frac{(0{,}2)^3}{3}-...+(-1)^n\frac{(0{,}2)^n}{n}+...=$$

$$=0{,}2-\frac{0{,}04}{2}+\frac{0{,}008}{3}-\frac{0{,}0016}{4}+...=0{,}2-0{,}02+0{,}00266-0{,}0004+...$$

Так как четвертый член ряда $0{,}0004<0{,}001$, ограничимся первыми слагаемыми. Значит,

$$\ln 1{,}2\approx 0{,}2-0{,}02+0{,}00266\approx 0{,}223.$$

§ 9. Ряды Фурье для периодических функций

В электротехнике широкое применение нашли функциональные ряды Фурье.

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом Т = $2l$ интегрируема на отрезке $[-l;\ l]$. *Рядом Фурье* функции $f(x)$ с периодом Т = $2l$ называется функциональный ряд

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad (10.5)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \quad (10.6)$$

В частности, если $T=2\pi$, то ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,\quad \text{где} \qquad (10.7)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx. \quad (10.8)$$

Теорема о разложимости периодической функции в ряд Фурье. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом Т=$2l$ на отрезке $[-l;\ l]$

1) кусочно-монотонна,

2) имеет конечное число точек разрыва 1-го рода,

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится для всех действительных x. При этом сумма ряда $S(x)=f(x)$ в точках ее непрерывности и $S(x)=\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$ в точках разрыва.

Пример 10.16. Разложить периодическую с периодом $T=2\pi$ функцию $f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ -\pi\le x<0,\\ 1 & при\ \ 0\le x<\pi,\end{cases}$ в ряд Фурье.

Построить графики функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$.

Решение. Найдем коэффициенты ряда Фурье по формулам (10.8):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1dx=\frac{1}{\pi}x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi-0)=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n}\left(\sin \pi n-\sin 0\right)=0 .$$

Аналогично находим коэффициенты b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\sin nxdx=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n}\left(\cos \pi n-\cos 0\right)=-\frac{1}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right).$$

Подставив найденные значения a_0, a_n, b_n в формулу (10.7), запишем разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье:

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\cos nx.$$

Поскольку $(-1)^n=\begin{cases}1, & \text{если } n\text{ - четное},\\ -1, & \text{если } n\text{ - нечетное},\end{cases}$ то придавая индексу n последовательно значения n=1,2,3,…,10, запишем сумму первых пяти ненулвых слагаемых ряда (сумму первых гармоник ряда):

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1}\cos x+\frac{2}{3}\cos 3x+\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{7}\cos 7x+...\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{7}\cos 7x+...\right).$$

Графики функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ изображены на рис.10.1 и рис. 10.2.

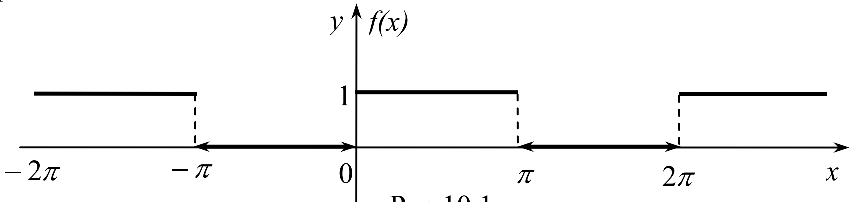


Рис.10.1

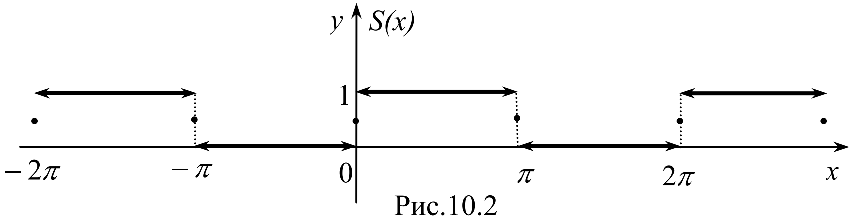


Рис.10.2

Заметим, что в точках разрыва 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$,… функция $S(x)$ принимает значения, равные полусумме значений функции $f(x)$ слева и справа от этих точек.

Если функция $f(x)$ – *четная* на интервале $(-l;\ l)$, т. е. $f(-x)=f(x)$, то в формуле (10.5) коэффициенты $b_n=0$ и ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}, \tag{10.9}$$

где
$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{10.10}$$

Если функция $f(x)$ – *нечетная* на интервале $(-\ l;\ l)$, то есть $f(-x)=-f(x)$, то в формуле (10.5) коэффициенты $a_0=0$, $a_n=0$ и ряд Фурье имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{10.11}$$

где
$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{10.12}$$

Пример 10.17. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T=4$ функцию $f(x)=x$, $-2\le x\le 2$.

Решение. Поскольку функция $f(x)=x$ является нечетной на интервале $(-2;2)$, то при разложении ее в ряд Фурье воспользуемся формулами (10.11), (10.12), где полагаем $l=2$:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\int_0^2 x\sin\frac{\pi nx}{2}dx.$$

При вычислении последнего интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu,\ \text{ положив } u=x,\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx.$$

Тогда $du=(x)'dx=dx$,

$$v=\int\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{2}{\pi n}\int\sin\frac{\pi nx}{2}d\left(\frac{\pi nx}{2}\right)=\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}.$$

Следовательно, $b_n=-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2+\int_0^2\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$

$$=-2\frac{2}{\pi n}\cos\pi n+0+\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2=-\frac{4}{\pi n}(-1)^n=\frac{4}{\pi n}(-1)^{n+1}.$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Исследовать сходимость ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+n^2}}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{4n^3-3}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n+1}}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

Выяснить, сходится ли данный ряд абсолютно, условно или расходится.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

Найти область сходимости данного ряда.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$.

Разложить данную функцию в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

12. $f(x)=\frac{1}{x+8}$. **13.** $f(x)=\ln(1-2x)$.

14. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=2e^x-y^3$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0$.

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом T=4 функцию

$$f(x)=\begin{cases}-\pi, & при\ \ -2<x<0,\\ \pi, & при\ \ 0\le x\le 2.\end{cases}$$

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №10

1⁰. Какое выражение является числовым рядом? **а)** $1, 2, 3, ..., 408,...$; **б)** $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 408\cdot ...$; **в)** $1-2+3+...-408+...$; **г)** $1+x+2\cdot x^2+...+n\cdot x^n+...$.
2⁰. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется сходящимся, если **а)** сходится последовательность частичных сумм; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$; **г)** остаток ряда при $n\to\infty$ стремится к $a>0$.
3. Укажите числовой ряд, для которого не выполняется необходимый признак сходимости **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{12^n}$.
4. Если для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n\ge 0)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}$, то этот ряд **а)** сходится; **б)** монотонно убывает; **в)** расходится; **г)** условно сходится.
5. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-2)^n$ равен $R=3$, то интервалом сходимости этого ряда является интервал **а)** $(-3;3)$; **б)** $(-1;5)$; **в)** $(-5;1)$; **г)** $(-2;2)$.
6*. Какой ряд сходится по признаку Лейбница? **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{3}\right)^n$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{3}\right)^{2n}$.
7*. Если периодическая с периодом $T=10$ функция $f(x)$ является нечетной, то ее ряд Фурье имеет вид: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{10}$, где $a_n=\frac{1}{10}\int\limits_{-10}^{10}f(x)\cos\frac{\pi nx}{10}dx$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\pi nx$, где $b_n=\frac{2}{5}\int\limits_0^5 f(x)\sin\pi nx\,dx$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{5}$, где $a_n=\frac{1}{5}\int\limits_0^5 f(x)\cos\frac{\pi nx}{5}dx$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{5}$, где $b_n=\frac{2}{5}\int\limits_0^5 f(x)\sin\frac{\pi nx}{5}dx$.

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ №3

1^0. Указать сопряженное число комплексному числу $-1+5i$.
а) $1-5i$; **б)** $-5i$; **в)** $-1-5i$; **г)** $-1-25i$.

2^0. Какую из форм записи комплексного числа называют показательной?
а) $z=x+iy$; **б)** $z=re^{i\varphi}$; **в)** $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; **г)** $z=x-iy$.

3^0. Какое уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка?
а) $y'-y^2=2x$; **б)** $(y')^2-y^2=2x^2$; **в)** $y''+xy=2$; **г)** $y^2=x^2+5$.

4^0. Какая из функций может являться общим решением ДУ первого порядка?
а) $y=c_1x+c_2$; **б)** $y=c\sin x$; **в)** $y=x\sin x$; **г)** $y=tg\,y+c$.

5^0. Укажите ряд, который является знакочередующимся.
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n$; **б)** $\dfrac{1}{2^n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{9}\right)^{2n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-5)^{2n-1}$.

6. Найти значение выражения $(2-3i)^2$.

7. Модуль комплексного числа $z=1-i$ равен
а) 2; **б)** 0; **в)** $\sqrt{2}$; **г)** π.

8. Какое из уравнений после разделения переменных принимает вид $\dfrac{dx}{x+5}=\dfrac{dy}{e^y}$?
а) $(x+5)dx=e^y dy$; **б)** $(x+5)dx=dy$;
в) $(x+5)e^y dx=dy$; **г)** $e^y dx=(x+5)dy$.

9. Какое из дифференциальных уравнений является однородным?
а) $y'=\dfrac{x+y}{3x+5y}$; **б)** $y'=y+e^x$; **в)** $y'=y^2+e^x+6$; **г)** $y'=\dfrac{x^2+y}{3x+5y}$.

10. Уравнение вида $y'+\mathrm{P}(x)\cdot y=\mathrm{Q}(x)$ решается с помощью
а) замены $y=xt$; **б)** замены $y=xu(x)$;
в) замены $y=u(x)\cdot v(x)$; **г)** замены $y=u(x)+v(x)$.

11. Уравнение вида $y'=ye^x+xy^3$ является
а) ДУ с разделяющимися переменными; **б)** однородным;
в) уравнением Бернулли; **г)** простым.

12. Если характеристическое уравнение имеет вид $k^2+6k-1=0$, то ему соответствует дифференциальное уравнение вида
а) $(y')^2+6y-1=0$; **б)** $y''+6y'-1=0$;
в) $y''+6y'-y=0$; **г)** $y''+6y'+y=0$.

13. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-b)^n$ определяется по формуле
а) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; **б)** $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$; **в)** $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$; **г)** $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x-b|}{|a_n|}$.

14. Применив достаточный признак расходимости ряда, установить, какой из рядов расходится
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{5^{n+1}}$.

15*. Записать общее решение ДУ $y''=\cos 5x$.

16*. Записать общее решение уравнения $y''-y'=0$.

17*. Если $f(x)$ - периодическая с периодом $T=2\pi$ интегрируемая и нечетная на отрезке [-π; π] функция, то ее ряд Фурье имеет вид
а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$; **б)** $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$;
в) $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$; **г)** $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

18*. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x)=\cos 2x$ имеет вид
а) $1-\dfrac{2x^2}{2!}+\dfrac{2x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{2x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$;
б) $1-\dfrac{2^2x^2}{2!}+\dfrac{2^4x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$;
в) $1-\dfrac{2^2x^2}{2}+\dfrac{2^4x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\dfrac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)}+\ldots$;
г) $1-\dfrac{2^2x^2}{2!}+\dfrac{2^4x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$.

НАИМЕНОВАНИЕ МОДУЛЕЙ И ИХ СОДЕРЖАНИЕ (4 СЕМЕСТР)

В соответствии с учебной программой по изучению дисциплины "Математика" для инженерно-технических специальностей аграрных вузов в четвертом семестре изучаются следующие модули.

Модуль 11. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Двойной интеграл и его свойства. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 1.
2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 1.
3. Двойной интеграл в полярных координатах. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 1.
4. Приложения двойного интеграла к задачам геометрии: вычисление площади плоской фигуры, объема тела, площади поверхности. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 3, 4.
5. Приложения двойного интеграла к задачам механики: вычисление массы, центра масс и моментов инерции плоской фигуры. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 3, 4.

$6^{э}$. Тройной интеграл и его свойства. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 2.

$7^{э}$. Приложения тройного интеграла к задачам геометрии и механики. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 4.

Модуль 12. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Криволинейный интеграл по длине дуги, его свойства и вычисление. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 5.
2. Криволинейный интеграл по координатам и его основные свойства. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 5.
3. Вычисление криволинейного интеграла по координатам. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 5.
4. Формула Грина. [4], глава 15, §3.
5. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. [4], глава 15, § 4.
6. Условие полного дифференциала. Нахождение функции по ее полному дифференциалу. [4], глава 15, §4.

Модуль13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

$1^{э}$.Скалярные и векторные поля. Геометрические характеристики полей. [1] т.1, часть III, раздел 3, § 1.

$2^{э}$. Основные операторы теории поля: градиент, дивергенция, ротор. Оператор Гамильтона. [1] т.1, часть III, раздел 3, § 2, 3.

$3^{э}$. Производная по направлению.Физический смысл градиента[8],§4

$4^{э}$. Простейшие векторные поля: соленоидальное, потенциальное, гармоническое. [8], §10.

$5^{э}$. Циркуляция векторного поля. [1] т.1, часть III, раздел 3, § 3.

$6^{э}$. Поверхностные интегралы первого и второго рода. [1] т.1, часть III, раздел 2, § 7.

$7^{э}$. Поток векторного поля. [1] т.1, часть III, раздел 3, § 2.

Модуль 14. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Элементы комбинаторики. [1], ч. 5, разд. 1, § 1.
2. Основные понятия теории вероятностей: события, классификация событий. Операции сложения и умножения событий. [1], ч. 5, разд. 1, § 1.
3. Вероятность события: статистическое, классическое и геометрическое определения вероятностей событий. [1], ч. 5, разд. 1, § 1, 2.
4. Основные аксиомы теории вероятностей. Непосредственное вычисление вероятностей событий. [1], ч. 5, разд. 1, § 1.
5. Теоремы сложения и умножения вероятностей.[1], ч.5,разд.1, §2.
6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.[1],ч.5,разд.1,§ 3.
7. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. [1], ч. 5, разд. 1, § 3, 8.
8. Случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины, его свойства. [1], ч. 5, разд. 1, § 4.
9. Интегральная функция распределения случайной величины, ее свойства. [1], ч. 5, разд. 1, § 4.
10. Дифференциальная функция (плотность) распределения и ее свойства. [1], ч. 5, разд. 1, § 4.
11. Числовые характеристики распределения случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, их свойства. Среднее квадратическое отклонение. [1], ч. 5, разд. 1, § 5.

12. Законы распределения случайных величин: биномиальный, Пуассона, равномерный и экспоненциальный. Распределение Стьюдента. Их числовые характеристики. [1], ч. 5, разд. 1, § 6.
13. Нормальный закон распределения. [1], ч. 5, разд. 1, § 7.
14. Системы случайных величин. Закон распределения систем. Понятие условного закона распределения. [1], ч.5, разд. 1, § 10.
15. Числовые характеристики распределения двумерной случайной величины, корреляционный момент, его свойства. [1], ч. 5, разд. 1, § 10.
16. Закон больших чисел. [1], ч. 5, разд. 1, § 8.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

11. Высшая математика для инженеров. В 2 т. Т.2: Учеб. пособие для вузов/ С.А. Минюк, Н.С. Березкина, А.В. Метельский; Под общ. ред. Н.А. Микулика. Мн.: ООО «Элайда», 2004 – 592 с.
12. Гусак А. А. Высшая математика. – Мн.: Тетра Системс, 1998.
13. Индивидуальные задания по высшей математике. 3 часть/ Под. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Вышэйшая школа, 2004 (второе издание).
14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985. – Т. 2.
15. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. – М.:Наука, 1985.
16. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Мн.: Вышейшая школа, 1986. – Ч. 2.
17. Элементы теории поля. Методические указания для студентов агроэнергетического факультета. Мн.: БГАТУ, 1999.
18. Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Вышейшая школа, 1976.
19. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятности и математической статистике. – Мн.: Вышэйшая школа, 1992.
20. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Общий курс высшей математики. – Орша, 1996.

Модуль 11. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Двойной интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой замкнутой области D плоскости xOy. Разобьем область D произвольным образом на n частей $s_1, s_2, \ldots, s_n$ с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Внутри каждой элементарной области s_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и найдем значение функции $f(x_i, y_i)$ в этой точке. Составим сумму:

$$I_n = f(P_1)\cdot\Delta s_1 + f(P_2)\cdot\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\cdot\Delta s_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta s_i$$

Эта сумма называется n*-й интегральной суммой* для функции $f(x,y)$ по области D.

Диаметром области s_i назовем наибольшее из расстояний между точками границы этой области и обозначим d_i.

Определение. Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм I_n при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей s_i, не зависящий ни от способа разбиения области D, ни от выбора точек P_i, то он *называется двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s$. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta s_i$$

Теорема существования. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по этой области.

Свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D cf(x,y)\mathrm{d}s = c\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s, \quad c = const.$

2. $\iint\limits_D (f_1(x,y)+f_2(x,y))\mathrm{d}s = \iint\limits_D f_1(x,y)\mathrm{d}s + \iint\limits_D f_2(x,y)\mathrm{d}s$.

3. Если область интегрирования D разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

§ 2. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах

В прямоугольной системе координат элемент площади $\mathrm{d}s$ можно записать в виде произведения $\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Область D называется *правильной в направлении оси* Ox (или Oy), если любая прямая, проходящая параллельно этой оси, пересекает границу области D не более, чем в двух точках.
Например, область D на рис. 11.1 является правильной в направлении оси Oy и неправильной в направлении оси Ox (прямая MN пересекает границу области D в четырех точках).

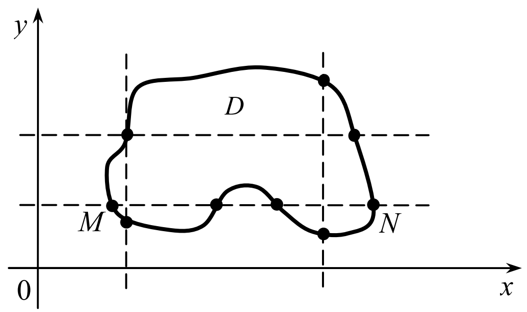


Рис. 11.1

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла следующим образом.

1) Пусть область D является правильной в направлении оси Oy и ограничена линиями: $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x), x=a, y=b$, причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $a<b$ (рис. 11.2).

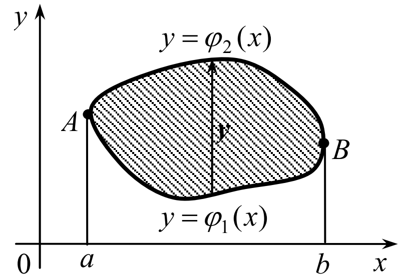


Рис. 11.2

При выборе внешнего интегрирования по переменной x (из рис.11.2 видно $a\le x\le b$) для определения внутренних пределов интегрирования по переменной y по области интегрирования проводим прямую, параллельную оси Oy снизу вверх. Прямая сначала пресекает кривую $y=\varphi_1(x)$, которую назовем *линией входа*. При выходе из области интегрирования прямая пересечет кривую $y=\varphi_2(x)$, которую назовем *линией выхода*. То есть значение переменной y в области D меняется в пределах $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \qquad (11.1)$$

Правая часть формулы называется *повторным интегралом*.
Таким образом, вычисление двойного интеграла свелось к вычислению повторного (двух определенных интегралов) интеграла вида

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]dx.$$

При вычислении «внутреннего интеграла» (записанного в квадратных скобках) x считается постоянным.

2) Пусть область D является правильной в направлении оси Ox и ограничена линиями: $x=\psi_1(y), x=\psi_2(y), y=c, y=d$, причем $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, $c<d$ (рис. 11.3).

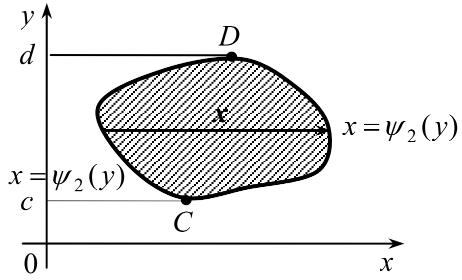


Рис. 11.3

При выборе внешнего интегрирования по переменной y (из рис.11.3 видно, что $c\le y\le d$) для определения внутренних пределов интегрирования по переменной x по области интегрирования проводим прямую, параллельную оси Ox слева направо. Прямая сначала пресекает кривую $x=\psi_1(y)$, которую назовем *линией входа*. При выходе из области интегрирования прямая пересечет кривую $x=\psi_2(y)$, которую назовем *линией выхода*. То есть значение переменной x в области D меняется в пределах $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d \mathrm{d}y\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (11.2)$$

При вычислении «внутреннего интеграла» y считается постоянным. Из (11.1) и (11.2) следует, что

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int\limits_c^d \mathrm{d}y\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (11.3)$$

Переход от левой части равенства (11.3) к правой и наоборот называется *изменением порядка интегрирования*.

Если область интегрирования является неправильной, то ее можно представить как объединение правильных областей. Тогда двойной интеграл равен сумме двойных интегралов по этим областям.

Пример 11.1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования двумя способами, если область D ограничена линиями $y=x^2$, $x+y=2$, $x\ge 0$.

Решение. Построим область D (рис. 11.4). Найдем точки пересечения линий $y=x^2$, $x+y=2$, решая систему уравнений,

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x+y=2, \end{cases} \quad x+x^2=2,\ x^2+x-2=0,\ D=1+8=9,$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}\ \Rightarrow\ x_1=1,\ x_2=-2\,.$$

Например, из первого уравнения системы находим: $y_1=(x_1)^2=1$, $y_2=(x_2)^2=4$. Таким образом парабола и прямая пересекаются в двух точках с координатами $(1,1)$ и $(-2,4)$, одна из которых $B(1,1)$ принадлежит границе области D (рис. 11.4).

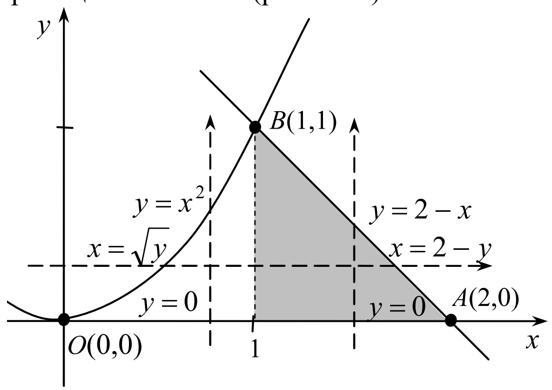


Рис. 11.4

Внешнее интегрирование по переменной y.

Область интегрирования D расположена между прямыми $y=0$, $y=1$, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном значении y от точек параболы $x=\sqrt{y}$ до точек прямой $x=2-y$ (рис. 11.4). Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx\,.$$

Внешнее интегрирование по переменной x.

Так как верхний участок границы OBA области D задан двумя линиями OB и BA, то прямая $x=1$ разбивает область D на области D_1: $0\le x\le 1$, $0\le y\le x^2$ и D_2: $1\le x\le 2$, $0\le y\le 2-x$. В результате получаем сумму двух повторных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy .$$

Пример 11.2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $x=0$, $y=-x$, $y=2-x^2$.

Решение. Построим область D (рис. 11.5).

Найдем точки пересечения линий из системы уравнений

$$\begin{cases} y=-x, \\ y=2-x^2, \end{cases} \quad -x=2-x^2,\ x^2-x-2=0,\ D=1+8=9,$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=2,\ x_2=-1.$$

Таким образом, $A(-1;1)$ – точка пересечения линий в рассматриваемой области.

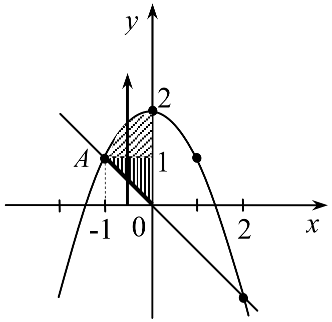


Рис. 11.5

Область интегрирования D расположена между прямыми $x=-1$, $x=0$, снизу ограничена прямой $y=-x$, сверху – параболой $x=2-y$ (рис. 11.4). Следовательно,

$$\iint\limits_D x\,dxdy=\int\limits_{-1}^{0} dx\int\limits_{-x}^{2-x^2} x\,dy=\int\limits_{-1}^{0} xy\Big|_{-x}^{2-x^2}dx=\int\limits_{-1}^{0} x\left(2-x^2-(-x)\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0} x\left(2-x^2+x\right)dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(2x-x^3+x^2\right)dx=\left(\frac{2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=0-\left((-1)^2-\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^3}{3}\right)=-\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=-\left(1-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}\right)=$$

$$=-\left(1-\frac{7}{12}\right)=-\frac{5}{12}.$$

Если проводить внешнее интегрирование по переменной y, то область D необходимо разбивать на две области прямой $y=1$ и считать не один, а сумму двух повторных интегралов.

§ 3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Если в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ область интегрирования представляет собой круг или часть круга, то при вычислении интеграла удобно перейти от декартовых к *полярным координатам* по формулам

$$x=r\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi,$$
$$dxdy=rdrd\varphi .$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi .$$

Вычисление последнего интеграла, как правило, упрощается.

Пример 11.3. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=9$ и осью Ox $(y\ge 0)$.

Решение. Построим область D (рис. 11.6).

Так область D представляет собой полукруг, перейдем к полярным координатам по формулам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Запишем уравнение окружности в полярных координатах:

$$x^2+y^2=9 \ \Rightarrow\ r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=9 \ \Rightarrow\ r^2=9 \ \Rightarrow\ r=3 .$$

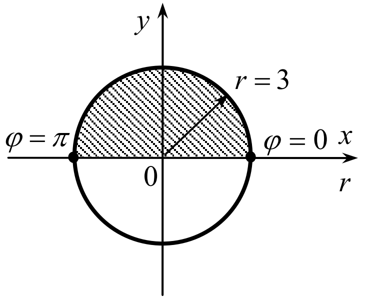


Рис. 11.6

Длина радиус-вектора меняется от 0 до 3, при движении конца радиус-вектора вдоль полуокружности угол поворота изменяется от 0 до π .

Таким образом, область D преобразуется в область D^*, задаваемую неравенствами $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le r \le 3$.

Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi, & \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le \varphi \le \pi \\ dxdy = rdrd\varphi, & 0 \le r \le 3 \end{vmatrix} = \iint\limits_{D^*} \sqrt{r^2}\,rdrd\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^3 r^2 dr = \int_0^{\pi} d\varphi \frac{r^3}{3}\bigg|_0^3 = \int_0^{\pi} d\varphi \frac{27}{3} = 9\int_0^{\pi} d\varphi = = 9\varphi\Big|_0^{\pi} = 9\pi .$$

§ 4. Приложения двойного интеграла к задачам геометрии и механики

1) *Площадь плоской фигуры*, занимающей область D, вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy .$$

2) *Объем* V *тела,* ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу – плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz (рис.11.7), можно найти по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy .$$

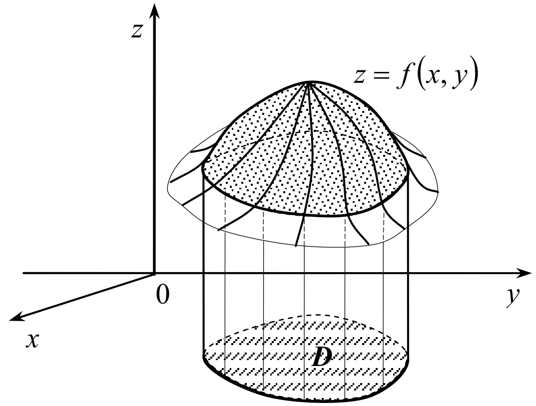


Рис. 11.7

3) *Площадь поверхности* $z = f(x, y)$, которая проектируется на область D плоскости xOy, вычисляется по формуле

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy .$$

4) *Масса пластинки* с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, занимающей область D плоскости xOy, вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy .$$

5) *Статические моменты относительно осей* Ox и Oy плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, вычисляются по формулам

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho(x, y)dxdy , \qquad M_y = \iint\limits_D x \cdot \rho(x, y)dxdy .$$

5) *Координаты центра масс плоской* пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x \cdot \rho(x, y)dxdy}{m} , \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y \cdot \rho(x, y)dxdy}{m}$$

где M_x, M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно, m – масса пластинки.

6) С помощью двойного интеграла можно вычислить также моменты инерции плоской пластины (см. [1], гл. 14, §9).

Пример 11.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 1$ и параболой $y = x^2 + 1$.

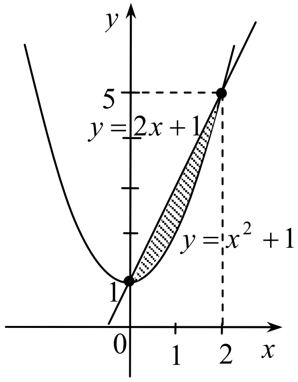


Рис. 11.8

Решение. Найдем точки пересечения линий: $2x + 1 = x^2 + 1$, $2x - x^2 = 0$ из системы уравнений

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = x^2 + 1, \end{cases} \quad x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Построим область интегрирования D (рис. 11.8). Тогда

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2+1}^{2x+1} dy = \int_0^2 dx \cdot y\Big|_{x^2+1}^{2x+1} = \int_0^2 \left(2x + 1 - x^2 - 1\right)dx =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Пример 11.5. Найти массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 2y$, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$.

Решение. Построим область интегрирования (рис. 11.9).

Массу пластинки найдем по формуле $m = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy = \iint\limits_D 2y\,dxdy$.

Область D задается неравенствами: $0 \le x \le 4$, $\sqrt{x} \le y \le 2$.

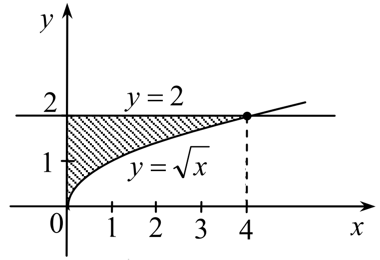


Рис. 11.9

Следовательно,

$$m = \iint_D y\,dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 2y\,dy = \int_0^4 dx\, y^2\Big|_{\sqrt{x}}^2 = \int_0^4 dx\left(4 - \left(\sqrt{x}\right)^2\right) =$$

$$\int_0^4 \left(4 - x\right)dx = \int_0^4 4dx - \int_0^4 x\,dx = \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 16 - 8 = 8.$$

Пример 11.6. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Данное тело V ограничено параболическим цилиндром $z = 4 - x^2$ с образующей, параллельной оси Oy и плоскостями $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 11.10).

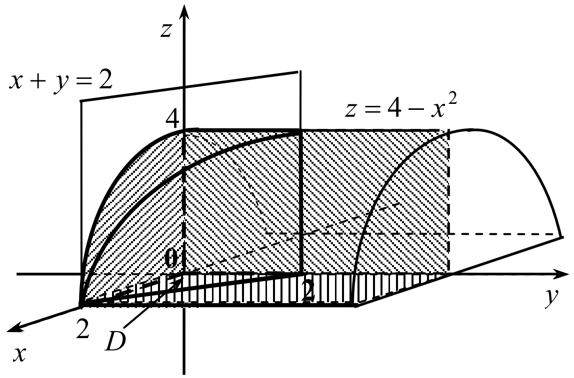


Рис. 11.10

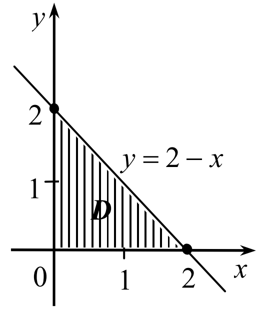


Рис. 11.11

Проекцией тела V на плоскости xOy является треугольник (рис.11.11). Область интегрирования D задается неравенствами: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$.

Тогда

$$V=\iint_D zdxdy=\iint_D\left(4-x^2\right)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\cdot\left(4-x^2\right)=\int_0^2\left(4-x^2\right)dx\cdot y\Big|_0^{2-x}=$$

$$=\int_0^2\left(4-x^2\right)\left(2-x\right)dx=\int_0^2\left(8-2x^2-4x+x^3\right)dx=\left(8x-2\cdot\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=16-2\cdot\frac{8}{3}-4\cdot 2+4=12-\frac{16}{3}=\frac{20}{3}.$$

§ 5. Тройной интеграл

Аналогично двойному интегралу вводится понятие *тройного интеграла*. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена (и непрерывна) в некоторой замкнутой области V пространства. Разобьем область V произвольным образом на n элементарных областей $V_1,\ldots,V_n$ с объемами $\Delta V_1,\ldots,\Delta V_n$. Внутри каждой элементарной области V_i выберем произвольную точку $P_i(x_i,y_i,z_i)$ и составим сумму

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i\ .$$

Предел последовательности интегральных сумм I_n, когда наибольший из диаметров $\mathrm{d}(V_i)\to 0$, называется *тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

С помощью тройного интеграла вычисляют:

1. Объем тела, занимающего область V пространства

$$V=\iiint_V dxdydz\ .$$

2. Массу m тела с переменной плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$

$$m=\iiint_V\rho\left(x,y,z\right)dxdydz\ ,$$

а также статические моменты, моменты инерции, координаты центра масс тела ([1], гл. 14, §14).

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла([1], гл. 14, §12).

Например, объем тела из примера 11.6 с помощью тройного интеграла можно вычислить следующим образом. Из рис.11.10 видно, что тело ограничено плоскостью $z=0$ снизу, поверхностью $z=4-x^2$ сверху и проектируется на треугольник (рис. 11.11). Поэтому область V задается неравенствами $0\le x\le 3$, $0\le y\le 2-x$, $0\le z\le 4-x^2$. Объем тела с помощью тройного интеграла вычисляем по формуле

$$V=\iiint_V dxdydz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{4-x^2}dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\ z\Big|_0^{4-x^2}=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}\left(4-x^2\right)dy\ .$$

Далее вычисления интеграла повторяют вычисления из задачи 11.6.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. В двойном интеграле $\iint_D f\left(x,y\right)dxdy$ расставить пределы интегрирования двумя способами, если область D ограничена линиями $y=x^2$, $y=x+2$, $x=0$ $\left(x\ge 0\right)$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-1$, $y=0$, $x=0$ $\left(x\ge 0\right)$.

3. Найти массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=xy$, ограниченной линиями $y=x$, $y=2x$, $x=2$.

4. Найти объем тела V, ограниченного параболическим цилиндром $y=x^2$ и плоскостями $y+z=4$, $z=0$.

5. Найти массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, ограниченной линиями $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$ $\left(x\ge 0,y\ge 0\right)$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №11

1⁰. Какая из формул справедлива для двойного интеграла?

а) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$; **б)** $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_D f(x)dx \int\limits_D f(y)dy$;

в) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx \int\limits_a^b dy$; **г)** $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

2⁰. Масса плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$ находится по формуле:

а) $m = \iint\limits_D xy\,dxdy$; **б)** $m = \iint\limits_D dxdy$; **в)** $m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$; **г)** $m = \frac{1}{S}\iint\limits_D dxdy$.

---

3. Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} xy\,dy$.

---

4. Если $f(x,y)=1$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ равен:

а) площади поверхности $z=f(x,y)$; **б)** площади области D;

в) объему цилиндрического тела; **г)** объему любого тела.

---

5. Площадь пластинки, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=4$, $x=0$ ($x \ge 0$) можно найти по формуле

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^4 dy$; **б)** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} dy$; **в)** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^4 dy$; **г)** $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{x^2} dx$.

---

6. Найти площадь пластинки из задания №5.

7*. Если в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)dy$ изменить порядок интегрирования, то он равен:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2x}^0 f(x,y)dx$; **б)** $\int\limits_1^0 dy \int\limits_{2x}^0 f(x,y)dx$; **в)** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^1 f(x,y)dx$; **г)** $\int\limits_1^0 dx \int\limits_{2x}^0 f(x,y)dy$.

8*. Если в двойном интеграле $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где D - внутренность круга $x^2+y^2 \le 4$, перейти к полярным координатам, то он равен **а)** 2π; **б)** 4π; **в)** 8π; **г)** π.

Модуль 12. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Криволинейный интеграл по координатам (второго рода)

Рассмотрим на плоскости xOy ориентированную гладкую дугу L (т.е. на дуге L указано направление и в каждой точке существует касательная). Пусть на L определена и непрерывна вектор-функция $\vec{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{k}$.

Разобьем дугу L на n элементарных дуг $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и построим векторы $\Delta\vec{l}_k = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$, направленные из начала в конец дуги l_k. На каждой элементарной дуге l_k выберем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ (рис. 12.1) и составим сумму скалярных произведений $\vec{a}(x_k, y_k)\cdot\Delta\vec{l}_k$:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(x_k, y_k)\cdot\Delta\vec{l}_k = \sum_{k=1}^{n}(P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k),$$

которая называется n-ой *интегральной суммой*.

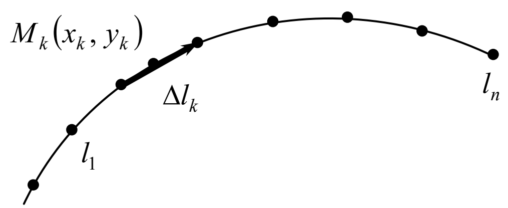


Рис. 12.1

Определение. Предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max\left|\Delta\vec{l}_k\right| \to 0$, называется *криволинейным интегралом по координатам (второго рода)* и обозначается

$$\int\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Аналогично вводится определение криволинейного интеграла от вектор-функции $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, по пространственной дуге L:

$$\int\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \lim_{\max|\Delta \vec{l}_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(x_k, y_k, z_k)\cdot \Delta\vec{l}_k .$$

Свойства криволинейного интетграла аналогичны свойствам определенного интеграла. В частности, из определения следует, что

$$\int\limits_{\smile AB} \vec{a}\cdot d\vec{l} = -\int\limits_{\smile BA} \vec{a}\cdot d\vec{l} ,$$

т.е. при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл меняет знак.

Механический смысл криволинейного интеграла

Пусть тело под действием переменной силы $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ движется по дуге кривой L. Тогда работа A этой силы может быть вычислена по формуле

$$A = \int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz .$$

§ 2. Вычисление криволинейного интеграла по координатам

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла следующим образом.

1) Если пространственная дуга L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, то

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt$$

2) В частности, если плоская дуга L задана уравнением $y = y(x)$, $x\in[a,b]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\cdot y'(x)\right]dx .$$

Пример 12.1. Вычислить $\int\limits_L xydx + (x^2 + y)dy$, если L **1)** дуга параболы $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, расположенная между точками $A(0,1)$ и $B(2,3)$; **2)** отрезок прямой AB.

Решение. 1) Сведем вычисление криволинейного интеграла к определенному, полагая $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, $dy = \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)' dx = xdx$, $0 \le x \le 2$.

Тогда $\displaystyle\int\limits_L xydx + (x^2 + y)dy = \int\limits_0^2 \left[x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)dx + \left(x^2 + \frac{x^2}{2} + 1\right)xdx\right] =$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{x^3}{2} + x + \frac{3}{2}x^3 + x\right)dx = \int\limits_0^2 (2x^3 + 2x)dx = \left(2\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Bigg|_0^2 = 8 + 4 = 12.$$

2) Запишем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{3-1}; \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2}; \quad y = x + 1 .$$

Следовательно,

$$\int\limits_L xydx + (x^2 + y)dy = \left|y = x + 1,\quad dy = dx,\quad 0 \le x \le 2\right| =$$

$$= \int\limits_0^2 \left[x(x+1)dx + (x^2 + x + 1)dx\right] = \int\limits_0^2 (2x^2 + 2x + 1)dx =$$

$$= \left(2\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} + 4 + 2 = \frac{34}{3}.$$

Пример 12.2. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = y^2\vec{i} + 2x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль контура окружности $x^2 + y^2 = 4$, пробегаемой против часовой стрелки.

Решение. Запишем параметрические уравнения окружности: $x = 2\cos t,\quad y = 2\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$ (т.к. обход окружности ведется против часовой стрелки). Работу A силы $\vec{F} = (F_x, F_y)$ найдем по формуле:

$$A = \int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int\limits_L F_x dx + F_y dy = \int\limits_L y^2 dx + 2xdy =$$

$$=\left|\begin{array}{ll} x=2\cos t, \quad dx=-2\sin t dt, \quad 0\le t\le 2\pi \\ y=2\sin t, \quad dy=2\cos t dt \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(2\sin t)^2(-2\sin t)dt+2\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t dt\right]=8\int_0^{2\pi}\sin^2 t d\cos t+8\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=$$

$$=8\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)d\cos t+8\int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt=$$

$$=\left(8\cos t-\frac{8}{3}\cos^3 t+4t+4\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=8(1-1)-\frac{8}{3}(1-1)+4\cdot 2\pi+0=8\pi .$$

§ 3. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от линии интегрирования

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Теорема. Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой области D с границей L, то справедлива следующая *формула Грина*:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$$

где замкнутый контур L обходится против часовой стрелки.

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D. Для того, чтобы криволинейный интеграл $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования, целиком лежащем в области D, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось равенство $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Если выполняется это условие, то выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ представляет собой *полный дифференциал* некоторой функции u, т.е.

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy .$$

Эту функцию $u(x,y)$ можно найти по одной из следующих двух формул

$$u(x,y)=\begin{cases}\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C,\\ \int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C.\end{cases} \qquad (12.1)$$

где C – произвольная постоянная.

Начальную точку $M_0(x_0,y_0)$ следует выбирать так, чтобы подынтегральные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ были определены в этой точке (удобно выбирать одну из точек $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ и т.д.).

Пример 12.3. Вычислить $\oint_L(2xy-y)dx+x^2dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(0,1)$ (рис. 12.2).

Решение. Поскольку контур является замкнутым, применим формулу Грина. В нашем случае

$$P(x,y)=2xy-y,\ \ Q(x,y)=x^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2x-1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x.$$

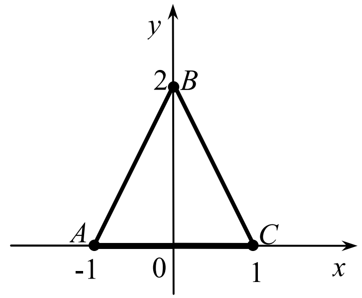


Рис. 12.2

Следовательно, $\oint_L(2xy-y)dx+x^2dy=\iint_\Delta\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=$

$$=\iint_\Delta(2x-2x+1)dxdy=\iint_\Delta dxdy=S_\Delta=\frac{1}{2}AC\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2 .$$

Пример 12.4. Найти функцию $u(x,y)$ по ее полному дифференциалу:

$$du(x,y)=\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y\right)dx+\frac{x}{y}dy.$$

Решение. Воспользуемся первой из формул (12.1), выбрав за начальную точку $M_0(1;\,1)$. Такой выбор вызван тем, что при $x_0=0,\ y_0=0$ функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ не определены. Получим

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y_0\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{x}{y}dy+C=\left|x_0=1,\,y_0=1\right|=$$

$$=\int\limits_{1}^{x}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln 1\right)dx+\int\limits_{1}^{y}\frac{x}{y}dy+C=(\operatorname{arctg}x-\ln x)\Big|_1^x+x\ln y\Big|_1^y+C=$$

$$=\operatorname{arctg}x-\ln x-\operatorname{arctg}1+x\ln y+C.$$

Поскольку $C-\operatorname{arctg}1$ также является постоянной, то окончательный ответ можно записать в виде $u(x,y)=\operatorname{arctg}x-\ln x+x\ln y+C$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти $\int\limits_{L_{OA}}2xydx+x^2dy$, если L_{OA} – дуга кривой $y=\dfrac{x^2}{4}$, заключенная между точками $O(0,0)$ и $A(2;1)$.

2. Показать, что выражение $\left(2xy-\dfrac{1}{x^2}\right)dx+\left(x^2-\dfrac{2}{y^3}\right)dy$ является полным дифференциалом функции $U(x,y)$. Найти функцию $U(x,y)$

3. Вычислить работу, производимую силой $\vec{F}=xy^2\vec{i}+x^2y\vec{j}$ вдоль отрезка прямой от точки $B(0,0)$ до точки $C(2;1)$.

4. Найти $\int\limits_{L_{AB}}(xy-1)dx+x^2ydy$, где L_{AB} - дуга эллипса $x=\cos t$, $y=2\sin t$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(0;2)$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №12

1⁰. Если кривая L_{AB} в плоскости xOy задана уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, то $\int_{L_{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ находится по формуле:

а) $\int\limits_a^b\left[P(x,f(x))+Q(x,f(x))f'(x)\right]dx$; **б)** $\int\limits_a^b\left[P(x,f(x))+Q(x,f(x))f(x)\right]dx$;

в) $\int\limits_a^b\left[P(x,f(x))+Q(x,f(x))\right]\cdot f'(x)dx$; **г)** $\int\limits_a^b\left[P(x,f(x))+Q(x,f(x))\right]dx$.

2⁰. Криволинейный интеграл второго рода численно равен
а) массе дуги; **б)** длине кривой; **в)** объему цилиндра;
г) работе переменной силы при перемещении вдоль кривой.

3. Вычислить $\int\limits_L xydx+xdy$ от т. $O(0,0)$ до т. $A(1,4)$, если $y=3x+1$.

4. $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования, если

а) $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$; **б)** $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$; **в)** $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$; **г)** $\dfrac{\partial P}{\partial y}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$.

5. Если $du=\left(x^2-2xy^2+3\right)dx+\left(y^2-2x^2y+3\right)dy$, то функция $u(x,y)$ находится по формуле

а) $x^3+y^3+x+y-x^2y^2+C$; **б)** $x^3+y^3+x+y-2x^2y^2+C$;

в) $x^3+y^3+x+y+C$; **г)** $x^3+y^3+x+y-4x^2y^2+C$.

6. Работа, производимая силой $\vec{F}=\left(x^2-y\right)\vec{i}+3x\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y=x^2-1$ от точки $A(0;-1)$ до точки $B(1,0)$, равна
а) 1; **б)** 6; **в)** 3; **г)**0.

7*. Вычислить $\int\limits_L\dfrac{dy}{x}-\dfrac{dx}{y}$, если L – первая четверть окружности $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

а) 0; **б)** $-\pi$; **в)** π; **г)** -2π.

8*. С помощью формулы Грина криволинейный интеграл $\oint\limits_L x^2ydx+xy^2dy$ преобразуется в интеграл

а) $\int\limits_L\left(x^2+y^2\right)dxdy$; **б)** $\iint\limits_D\left(x^2-y^2\right)dxdy$; **в)** $\iint\limits_D 4xydxdy$; **г)** $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$.

Модуль13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Скалярные и векторные поля. Геометрические характеристики полей

Если в каждой точке $M(x,y,z)$ некоторой области V пространства (или плоскости) определена скалярная функция $u=u(M)$, то говорят, что в области V задано *скалярное поле* $u=u(M)=u(x,y,z)$.

Примерами скалярных полей являются: поле температуры T внутри тела, поле потенциала φ электрического заряда, поле плотности ρ тела и т.д.

Если в каждой точке $M(x,y,z)$ некоторой области V пространства (или плоскости) определен вектор

$$\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

то говорят , что в области V задано *векторное поле*

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=\vec{a}(x,y,z).$$

Примерами векторных полей являются: поле скоростей $\vec{v}$ текущей жидкости, поле электрической напряженности $\vec{E}$, поле магнитной напряженности $\vec{H}$ и т.д.

§ 2. Операторы теории поля: $grad, div, rot.$ Оператор Гамильтона

Важнейшими характеристиками скалярных и векторных полей являются градиент ($grad$) скалярного поля, дивергенция (div) и ротор (rot) векторного поля.

Определение. *Градиентом* дифференцируемого скалярного поля $u(M)=u(x,y,z)$ называется вектор

$$grad\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Определение. *Дивергенцией* (или расходимостью) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M)=(P,Q,R)$ называется скаляр

$$div\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Определение. *Ротором* (или вихрем) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M)=(P,Q,R)$ называется вектор

$$rot\vec{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

который с помощью символической записи удобно представить в виде векторного произведения

$$rot\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Операторы $grad$, div, rot называются *основными операторами теории поля*.

В качестве примеров использования указанных операторов приведем формулу связи напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ электростатического поля: $\vec{E}=-grad\,\varphi$ и систему уравнений Максвелла для стационарного электромагнитного поля:

1. $rot\vec{E}=0$. **3.** $div\vec{D}=\rho$.

2. $rot\vec{H}=\vec{j}$. **4.** $div\vec{B}=0$.

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно, $\vec{j}$ – вектор плотности электрического тока, $\vec{D}$ – вектор электрического смещения, $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции, ρ – плотность электрического заряда.

В математической и особенно физической литературе наряду с введенными операторами широко используется символический векторный дифференциальный *оператор набла (оператор Гамильтона)*:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Правила работы с оператором ∇ такие же, как и с обычными векторами.

Выразим операторы поля через оператор ∇. Вычисляя произведение вектора ∇ на скалярную функцию u, скалярное и векторное произведения вектора ∇ на ветор $\vec{a}$, получим формулы

$$grad\ u=\nabla u,\qquad div\vec{a}=\nabla\cdot\vec{a},\qquad rot\vec{a}=\nabla\times\vec{a}.$$

Пример 13.1. Для вектора $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ найти $grad\,(div\,\vec{a})$ и $div\,(rot\,\vec{a})$.

Решение. $div\,\vec{a} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(zx^2) = y^2 + z^2 + x^2$,

$grad\,(div\,\vec{a}) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$,

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & yz^2 & zx^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(zx^2) - \frac{\partial}{\partial z}(yz^2)\right) -$$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(zx^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right) =$$

$$= \vec{i}\,(0 - y \cdot 2z) - \vec{j}\,(z \cdot 2x - 0) + \vec{k}\,(0 - x \cdot 2y) = -2yz\vec{i} - 2xz\vec{j} - 2xy\vec{k}.$$

$$div(rot\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(-2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-2xy) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

§ 3. Производная по направлению. Физический смысл градиента

Пусть функция $u(M) = u(x, y, z)$ определена в некоторой области V пространства.

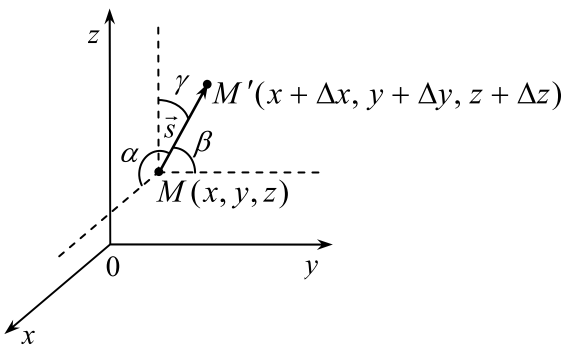


Рис.13. 1

Из заданной точки $M(x, y, z)$ проведем вектор $\vec{s}$. На луче, задаваемом вектором $\vec{s}$ и точкой M, отметим точку $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ (рис.13.1).

Расстояние между точками M и M' обозначим через Δs. Поэтому

$$\Delta s = |\overrightarrow{MM'}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Тогда при переходе из точки M в точку M' функция $u(x, y, z)$ получит приращение

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z).$$

Определение. Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta u}{\Delta s}$, когда $\Delta s \to 0$, то он называется *производной функции* $u(x, y, z)$ в точке M *по направлению вектора* $\vec{s}$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial s}$, т.е. по определению

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta s}.$$

Теорема 1. Если функция $u(x, y, z)$ дифференцируема в области V, то ее производная по любому направлению $\vec{s}$ существует в каждой точке области и равна

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, т.е. $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$.

С физической точки зрения производная по направлению характеризует скорость изменения функции в заданном направлении.

Физический смысл градиента

Вектор $grad\,u$ к каждой точке M скалярного поля $u(M)$ ортогонален поверхности уровня этого поля и указывает направление наиболее быстрого роста функции $u(M)$, а его величина $|\,grad\,u\,|$ дает скорость этого роста.

Пример 13.2. Вычислить производную функции $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$ по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ в точке $M(1, 0, -1)$.

Решение. Найдем частные производные функции u и вычислим их значения в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x + yz\Big|_M = \frac{2}{1+0} + 0 = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2y + xz\Big|_M = 0 + 1 \cdot (-1) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 + xy\big|_M = 0.$$

Вычислим длину и направляющие косинусы вектора $\vec{s}$:

$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3, \qquad \vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Следовательно, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Производную по направлению найдем по формуле

$$\frac{\partial u(M)}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} + 0\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1.$$

§ 4. Простейшие векторные поля

К простейшим векторным полям относятся: соленоидальное, потенциальное и гармоническое.

Определение. Векторное поле $\vec{u}(M)$ называется *соленоидальным* или *трубчатым*, если во всех точках поля

$$div\,\vec{a}(M) = 0.$$

Соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков, его векторные линии замкнуты. Поскольку $div\,\vec{B} = 0$, то поле вектора магнитной индукции является соленоидальным.

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным* или *безвихревым*, если во всех точках поля

$$rot\,\vec{a}(M) = 0.$$

Для потенциального векторного поля $\vec{a}(M)$ всегда найдется такая скалярная функция $u(M)$ (потенциал векторного поля $\vec{a}(M)$), что $\vec{a}(M) = grad\, u(M)$.

Определение. Векторное поле называется *гармоническим*, если во всех точках поля

$$div\vec{a}(M) = 0 \text{ и } rot\vec{a}(M) = 0.$$

т.е. поле является соленоидальным и потенциальным.

Пример 13.3. Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ гармоническим.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется гармоническим, если оно является соленоидальным и потенциальным, то есть в каждой точке М поля выполняются равенства $div\,\vec{a}(M) = 0$ и $rot\vec{a}(M) = 0$.

Найдем операторы:

$$div\vec{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(z - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x - z) + \frac{\partial}{\partial z}(x - y) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$rot\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - z & x - y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - z & x - y \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - y \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z - y & x - z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1 - (-1)) - \vec{j}(1 - 1) + \vec{k}(1 - (-1)) = 0 + 0 + 2\vec{k} \neq 0.$$

Следовательно, поле является соленоидальным, но не является потенциальным.

Таким образом, поле не является гармоническим.

§ 5. Циркуляция векторного поля

Рассмотрим непрерывное векторное поле $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, определенное в каждой точке гладкой замкнутой кривой L.

Определение. *Циркуляцией* C векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутой кривой L называется криволинейный интеграл второго рода

$$C = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \oint_L P dx + Q dy + R dz.$$

В случае, когда векторное поле $\vec{a}(M)$ является силовым полем, циркуляция дает величину работы этого поля вдоль кривой L.

Если кривая L лежит в плоскости xOy, то направление обхода против часовой стрелки считается положительным, а по часовой – отрицательным.

Пример 13.4. Материальная точка массой m движется по эллипсу L: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в положительном направлении под действием переменной силы $\vec{F} = m\varepsilon(-y\vec{i} + x\vec{j})$, где ε – угловое ускорение. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{F}$ вдоль контура L.

Решение. Запишем параметрические уравнения эллипса

$$L: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Циркуляция вектора $\vec{F}$ вдоль контура L равна

$$C = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = m\varepsilon \oint_L -y dx + x dy = \begin{vmatrix} x = a\cos t, & dx = -a\sin t dt, \\ y = b\sin t, & dy = b\cos t dt, 0 \le t \le 2\pi \end{vmatrix} =$$

$$= m\varepsilon \int_0^{2\pi} (ab\sin^2 t + ab\cos^2 t) dt = mab\varepsilon \int_0^{2\pi} dt = 2\pi mab\varepsilon = A,$$

где A – работа силы $\vec{F}$ вдоль контура L.

Примеры циркуляций векторных полей

1. Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ элетрического поля вдоль контура L равна э.д.с., возникающей в этом контуре

$$C = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon.$$

2. Циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля вдоль контура L равна силе тока в этом контуре

$$C = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i.$$

§ 6. Понятие о поверхностных интегралах. Поток векторного поля

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в каждой точке некоторой поверхности S. Разобьем S произвольным образом на n элементарных частей $S_1, ..., S_n$ с площадями $\Delta S_1, ..., \Delta S_n$. На каждой элементарной поверхности S_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим сумму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i$.

Определение. Предел последовательности интегральных сумм I_n, когда $\max \Delta S_i \to 0$ называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается $\iint_S f(x, y, z) dS$.

Вычисление этого интеграла сводится к вычислению двойного интеграла (см.[7], §15.3).

Пусть в каждой точке некоторой поверхности S определен непрерывный вектор

$$\overline{a}(M) = \overline{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}.$$

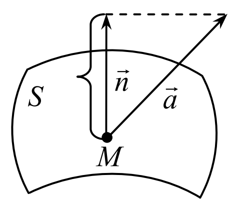


Рис. 13.2

Зададим направление нормали $\overline{n}$ к поверхности S (эту сторону поверхности считаем положительной). Проекция a_n вектора $\vec{a}$ в каждой точке M поверхности S будет являться скаляром (рис.13.2). Поэтому функция $a_n(x, y, z) = np_{\overline{n}} \vec{a}(x, y, z)$ будет скалярной функцией и от нее можно вычислить поверхностный интеграл первого рода.

Поверхностным интегралом второго рода от вектора $\overline{a}(M)$ по поверхности S называется поверхностный интеграл первого рода от проекции $a_n(M)$ этого вектора на вектор нормали $\vec{n}$ к S и обозначается

$$\iint_S \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S a_n \cdot \mathrm{d}S .$$

В теории поля поверхностный интеграл второго рода *называется потоком векторного поля* $\overline{a}(M)$ через поверхность.

Примеры потоков векторных полей

1. Поток электрического поля точечного заряда напряженностью $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S, охватывающую этот заряд, равен

$$\varPhi_e = \iint_S \vec{E}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_S E_n \mathrm{d}S .$$

2.Поток магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ через поверхность S равен

$$\varPhi_m = \iint_S \vec{B}\cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S B_n dS .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯСАМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Дана функция $u = x^2 + xyz + y^2\ln(z)$ и точки $M_1(-1;0;1)$, $M_2(1;1;3)$. Найти: **а)** $grad\, u(M_1)$; **б)** производную в точке M_1 по направлению вектора $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Задано векторное поле $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$. Найти $div\ \vec{a}$ и $grad\ div\ \vec{a}$.

3. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ гармоническим.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура эллипса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ при положительном направлении обхода.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №13

1⁰. Если $u = u(x,y,z)$ – скалярное поле, то равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ задает

а) ротор; **б)** дивергенцию**;**
в) градиент; **г)** производную по направлению.

2⁰. Векторное поле $\vec{a}(M)$ во всех точках которого выполняется условие $div\,\vec{a}(M) = 0$, называется

а) гармоническим ; **б)** скалярным;
в) соленоидальным; **г)** потенциальным.

3. Вектор *grad u* указывает

а) направление наибольшего изменения функции;
б) направление наименьшего изменения функции;
в) постоянство функции; **г)** направление функции.

4. Если $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то циркуляция силы $\vec{F}$ вдоль замкнутой линии *L* представляет собой:

а) мощность; **б)** работу силы;
в) момент силы; **г)** плечо силы.

5.Если $u = u(x,y,z)$ – скалярное поле, то $div\,(grad\,u)$ есть

а) скалярное поле; **б)** векторное поле;
в) скалярно-векторное поле; **г)** оператор не определен.

6.Если $\vec{a}(M)$ – векторное поле, то $rot\,\vec{a}(M)$ находится по формуле

а) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ P & Q & R \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$; **в)** $\dfrac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\vec{k}$;
г) $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

7*. Производная функции $u = xy^2z^3$ по направлению вектора $\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ в точке $M_0(1;1;1)$ равна

а) $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{1}{3}\vec{i} - \dfrac{1}{3}\vec{j} + 2\vec{k}$; **б)** $\dfrac{\partial u}{\partial s} = 3$; **в)** $\dfrac{\partial u}{\partial s} = 1$; **г)** $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$.

8*. Если $\vec{a} = yz\vec{i}$ то $rot\,\vec{a}$ равен.

а) $y\vec{j} - z\vec{k}$; **б)** 0; **в)** $z\vec{j} - y\vec{k}$; **г)** $y + z$.

Модуль 14. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Классификация событий

Определение. *Событием* в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате какого-то опыта (испытания). Например, трактор проработал без капитального ремонта 7000 часов - это событие.

В теории вероятностей события обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C* и т.д. или одной буквой, снабженной индексами: A_1, A_2, A_3 и т.д.

По возможности появления события делятся на достоверные, невозможные, случайные.

Определение. *Достоверное событие* - это такое событие, которое в результате данного испытания обязательно наступит. Например, если в ящике находятся только болты, то событие "из ящика извлечен болт" является достоверным.

Определение. *Невозможное событие* - это такое событие, которое в результате данного испытания не может произойти. Извлечение из массы непротравленного зерна одного протравленного зерна - событие невозможное.

Определение. *Случайное событие* - это такое событие, которое в результате данного испытания может произойти, но может и не произойти. Например, на колхозном поле работают 3 комбайна. Событие состоящее в том, что в данный момент неисправными окажутся все комбайны – случайное.

Виды случайных событий.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Например, механизатор может работать на тракторе и на комбайне. Пусть событие A - механизатор в данный момент работает на тракторе, событие B - на комбайне. События A и B - несовместные.

События $A_1, A_2, \dots A_n$ называются *равновозможными*, если условия их появления одинаковы.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания обязательно наступит хотя бы одно из них. На практике

широкое применение находит полная группа несовместных событий. Например, по цели производится три выстрела. Исходом испытания может быть одно из событий: A – три промаха, B – одно попадание, C – два попадания, D – три попадания. События *A, B, C, D* образуют полную группу несовместных событий.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными*. Событие, противоположное событию A, принято обозначать $\overline{A}$.

Например, событие A - деталь годная, событие $\overline{A}$ - деталь бракованная.

§ 2. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей.

Соединениями называют различные группы, составленные из каких-либо объектов.

Элементами называются объекты, из которых составлены соединения.

Различают следующие три вида соединений: *перестановки, размещения и сочетания.*

Определение. *Перестановками* из n элементов называют соединения, содержащие все n элементов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов находится по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n .$$

Пример 14.1. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 6 человек?

Решение. Количество таких способов вычисляется по формуле:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 .$$

Определение. *Размещениями* из n элементов по k в каждом $(n \geq k)$ называют такие соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k находят по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 14.2. На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда ?
Решение. Число способов вычисляется по формуле:

$$A_6^4 = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360 \quad \text{или} \quad A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2} = 360.$$

Определение. *Сочетаниями* из n элементов по k $(n \geq k)$ называют соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k находят по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Для упрощения вычислений при $k > \frac{n}{2}$ полезно использовать следующее свойство сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Пример14.3. Бригадир должен отправить на работу звено из 18 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 20 человек бригады?
Решение. Число звеньев определяется по формуле:

$$C_{20}^{18} = C_{20}^2 = \frac{A_{20}^2}{P_2} = \frac{20\cdot19}{1\cdot2} = 190.$$

Пример 14.4. Сколькими способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?
Решение. В соответствии с формулой находим

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!\cdot3!} = \frac{10!}{7!\cdot3!} = \frac{8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3} = 120.$$

§ 3. Классическое определение вероятности

Определение. Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m - число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A; n - число всех равновозможных элементарных исходов испытания.

Свойства вероятности

1. *Если А - достоверное событие, то* $P(A) = 1$.

2. *Если А - невозможное событие, то* $P(A) = 0$.

3. *Если А - случайное событие, то* $0 < P(A) < 1$.

Следовательно, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример 14.5. В ящике 10 одинаковых по размерам и весу деталей, из которых 4 выкрашены в черный цвет и 6 – в белый. Из ящика извлекается одна деталь. Какова вероятность того, что извлеченная деталь окажется черного цвета?
Решение. Событие “ извлеченная деталь черного цвета ”обозначим A. Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 4 благоприятствуют наступлению события A. Значит,

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Пример 14.6. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наугад деталей 4 стандартные.
Решение. Основное событие A – “среди 6 взятых деталей 4 стандартные”. По классическому определению вероятности события $P(A) = \frac{m}{n}$. Общее число равновозможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов C_{10}^6. Четыре стандартные детали из семи стандартных можно взять

C_7^4 способами, при этом остальные 6 – 4 = 2 детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из 10 – 7 = 3 нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $m = C_7^4 \cdot C_3^2$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{\frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{3!}{1!\cdot 2!}}{\frac{10!}{4!\cdot 6!}} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

§ 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Определение. *Суммой двух событий A и B* называется событие C, состоящее в наступлении события A, или события B, или обоих событий вместе. Обозначается $A + B = C$.

Например, если событие A – попадание в цель при первом выстреле, событие B – попадание в цель при втором выстреле, то событие $C = A + B$ есть попадание в цель либо при первом выстреле, либо при втором, либо при обоих выстрелах.

Если события A_1 и A_2 – несовместные, то событие $A_1 + A_2$ означает наступление одного из событий A_1 или A_2.

Определение. *Суммой нескольких событий* A_1, A_2, $\ldots A_n$ называется событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Обозначается $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Определение. *Произведением двух событий* A и B называется событие C, состоящее в совместном наступлении события A и события B. Обозначается $C = A \cdot B$.

Например, в саду высадили два дерева. Событие A - первое дерево в этом году даст плоды, событие B - второе дерево в этом году даст плоды. Событие $C = A \cdot B$ означает, что оба дерева в этом году дадут плоды.

Определение. *Произведением нескольких событий* называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Обозначается $C = A_1 A_2 \ldots A_n$.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы n несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствие 1. Если события A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Определение. Два события называются *независимыми*, если вероятность наступления одного из них (причем любого) не зависит от того, произошло или не произошло другое событие. В противном случае события называются *зависимыми*.

Например, фары трактора или автомобиля подсоединены параллельно. Отказ в работе левой фары – событие A, отказ в работе правой фары – событие B. События A и B независимые.

Определение. Несколько событий называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них и любая комбинация из остальных событий (содержащая либо все события, либо часть из них) есть события независимые.

Например, на каждом из трех стеллажей склада находится по 25 поршней первого и второго допуска. Из каждого стеллажа берут по одному поршню. Рассмотрим 3 события: A – взятый с первого стеллажа поршень имеет первый допуск, B – взятый со второго стеллажа поршень имеет второй допуск, C – взятый с третьего стеллажа поршень имеет первый допуск. События A, B, C – независимые в совокупности.

Определение. *Условной вероятностью* $P_B(A)$ или $P(A/B)$ называется вероятность события A, вычисленной в предположении, что событие B уже наступило.

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность произведения (совместного наступления) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие. Вероятность произведения (совместного наступления) нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, … A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, … $\overline{A}_n$, т.е.

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность произведения (совместного наступления) двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ или } P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Пример 14.7. В урне 40 шаров: 15 красных, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шар?

Решение. Извлечение цветного шара означает появление либо красного, либо зеленого. Вероятность извлечения красного шара (событие *A*): $P(A) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$. Вероятность извлечения зеленого шара (событие *B*): $P(B) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$. Так как события несовместны, то получаем

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Пример 14.8. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность появления

а) только одного из этих событий;
б) двух событий;
в) хотя бы одного события.

Решение. а) Из условия задачи

$$P(A_1) = 0{,}7, \quad P(A_2) = 0{,}8, \quad P(A_3) = 0{,}9,$$

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3, \; P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2, \; P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Пусть событие *B* – появление только одного из этих трех событий, а так как появится может или A_1, или A_2, или A_3, то

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$

Отсюда в силу несовместности и независимости событий

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) +$$
$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

б) Пусть событие C – появление только двух событий. Тогда

$$C = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3.$$

Отсюда $P(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}398.$

в) Пусть событие D – появления хотя бы одного события. Тогда противоположное событие $\overline{D}$ – ни одно событие не появилось в испытаниях, т.е. $\overline{D} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$.

Поэтому $P(\overline{D}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$. Отсюда

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Пример 14.9. Среди 15 микрокалькуляторов, имеющихся в вычислительной лаборатории, лишь 6 новых, а остальные – бывшие в употреблении. Наугад взято три микрокалькулятора. Какова вероятность, что все они окажутся новыми?

Решение. Рассмотрим события:

A – первый из взятых микрокалькуляторов новый;
B – второй микрокалькулятор новый;
C – третий микрокалькулятор новый.

Тогда вероятность достать новый микрокалькулятор при первой попытке равна

$$P(A) = \frac{6}{15}.$$

Вероятность того, что второй микрокалькулятор будет новым, при условии, что первым уже был отобран новый микрокалькулятор равна (условная вероятность события B)

$$P_A(B)=\frac{5}{14}.$$

Вероятность того, что третьим будет отобран новый микрокалькулятор, при условии, что уже отобраны два новых микрокалькулятора, т.е. условная вероятность события C, равна

$$P_{AB}(C)=\frac{4}{13}.$$

Искомая вероятность, что все три отобранных микрокалькулятора окажутся новыми, равна

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}=\frac{4}{91}.$$

§ 5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, $\dots H_n$, образующих полную группу. Будем эти события называть гипотезами. Вероятность события A в этом случае вычисляется по формуле

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A),$$

которая носит название *формулы полной вероятности.*

Пример 14.10. В мастерской работают 5 станков 1-го типа, 3 станка 2-го типа и 2 станка 3-го типа. Детали, изготовленные на этих станках, могут быть различного качества. Станки 1-го типа дают 94% качественных деталей, станки 2-го типа дают 90% качественных деталей, а станки 3-го типа - 85% качественных деталей. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь качественная.

Решение. Пусть событие A – взятая деталь качественная.

Выдвигаем следующие гипотезы:

H_1 – деталь изготовлена станком 1-го типа;

H_2 – деталь изготовлена станком 2-го типа;

H_3 – деталь изготовлена станком 3-го типа.

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A).$$

По условию задачи

$$P(H_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\quad P(H_2)=\frac{3}{10},\quad P(H_3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},$$

$$P_{H_1}(A)=0{,}94,\quad P_{H_2}(A)=0{,}9,\quad P_{H_3}(A)=0{,}85.$$

где $P_{H_i}(A)$, $i=1,2,3$ - условные вероятности, что взятая деталь качественная, если она изготовлена на станке i-го типа.

Подставляем числовые значения в формулу полной вероятности и получаем:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}94+\frac{3}{10}\cdot 0{,}9+\frac{1}{5}\cdot 0{,}85=0{,}47+0{,}27+0{,}17=0{,}91.$$

Формула Байеса (вероятности гипотез).

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, $\dots$, H_n, образующих полную группу. Вероятности этих гипотез до опыта известны и соответственно равны $P(H_1)$, $P(H_2)$, $\dots P(H_n)$. Произведен опыт, в результате которого наступило событие A. Вероятность $P_A(H_i)$ гипотезы H_i, после того, как событие A наступило, определяется по формуле Байеса

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)},\qquad i=1,2,\dots n.$$

Пример 14.11. В трех ящиках находятся одинаковые детали. В 1-ом – 10 деталей, из них 3 нестандартных, во 2-ом –15 деталей, из них 5 нестандартных, в 3-ем – 20 деталей, из них 6 нестандартных. Из одного из ящиков извлечена деталь, которая оказалась нестандартной. Определить вероятность того, что деталь извлечена из 2-го ящика.

Решение. Основное событие A – извлечена нестандартная деталь. Вводим гипотезы:

H_1 - деталь извлечена из 1-го ящика,

H_2 -деталь извлечена из 2-го ящика,

H_3 - деталь извлечена из 3-го ящика.

По формуле Байеса следует найти $P_A(H_2)$, т.е.

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)},$$

где $P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)$.

Гипотезы равновозможные, следовательно,

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

По условию задачи условные вероятности события A равны:

$$P_{H_1}(A)=\frac{3}{10},\quad P_{H_2}(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},\quad P_{H_3}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}.$$

Тогда

$$P_A(H_2)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{9+10+9}{90}}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}.$$

§ 6. Повторение испытаний

Формула Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и равна p, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно m раз, определяется по формуле Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m},\quad \text{где}\quad q=1-p.$$

На практике формулой Бернулли удобно пользоваться, если n не очень велико $(n<10)$.

Пример 14.12. Вероятность изготовления на станке детали высшего качества равна 0,8. Найти вероятность того, что из 6 взятых наудачу деталей 4 высшего качества.

Решение. Из условия задачи имеем, что n = 6, m = 4, p = 0,8, q = 1-0,8 = 0,2. Тогда, применяя формулу Бернулли, получаем

$$P_6(4)=C_6^4\,0{,}8^4 0{,}2^2=\frac{6\cdot 5}{2}0{,}8^4\cdot 0{,}2^2=6{,}144\cdot 0{,}04=0{,}245.$$

Формула Пуассона. Если производится достаточно большое число испытаний (n велико), в каждом из которых вероятность наступления события A постоянна, но мала, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, определяется приближенно формулой

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda},\qquad \text{где } \lambda=n\cdot p.$$

Пример 14.13. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие в пути повредится $p=0{,}0002$. Найти вероятность того, что в пути повредится только 3 изделия.

Решение. Применяем формулу $P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$, где $\lambda=n\cdot p$.

По данным задачи $P_{5000}(m=3)=\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$, $\lambda=np=5000\cdot 0{,}0002=1$.

Тогда $$P_{5000}(m=3)=\frac{1^3 e^{-1}}{3!}=\frac{1}{6e}=0{,}06.$$

Локальная теорема Лапласа. Если производится n независимых испытаний (n - велико), и вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, определяется по формуле

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\cdot\varphi(x),$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\frac{m-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, причем результат тем точнее, чем ближе значение p к $\frac{1}{2}$ и чем больше n.

Функция $\varphi(x)$ – четная. Это означает, что $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Значения функции $\varphi(x)$ приведены в таблице 3 краткого справочника, помещенного в конце учебно-методического комплекса.

Замечание. В таблице 3 приведены значения функции $\varphi(x)$ при $0\le x\le 4$, при $|x|>4$ полагают $\varphi(x)=0$.

Пример 14.14. Производятся 400 независимых испытаний. Вероятности наступления события A в каждом испытании

$P(A)=p=0{,}2$. Найти вероятность того, что в 400 испытаниях событие A наступит 100 раз.

Решение. По условию задачи имеем: $p=0{,}2$, q = 1-0,2 = 0,8, n= 400, m=100. Тогда, применяя локальную теорему Лапласа, находим

$$P_{400}(100)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}},\qquad x=\frac{100-0{,}2\cdot 400}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=\frac{20}{8}=2{,}5.$$

Из таблицы 3 находим значение функции $\varphi(x)=0{,}0175$. Тогда

$$P_{400}(100)\approx\frac{0{,}0175}{8}=0{,}0021.$$

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее чем m_1 раз и не более чем m_2 раза, определяется по формуле

$$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,\qquad x_1=\frac{m_1-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}},\qquad x_2=\frac{m_2-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}.$$

Функция $\Phi(x)$ - нечетная. Это означает $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.Значения функции $\Phi(x)$ приведены в таблице 4 краткого справочника, помещенного в конце учебно-методического комплекса. При $x\ge 5$ полагают $\Phi(x)=0{,}5$.

Пример 14.15. Вероятность оказаться стандартным для данного изделия 0,8. Найти вероятность того, что среди 900 изделий число стандартных будет находиться в границах от 690 до 740.

Решение. По условию задачи: n = 900, m_1 = 690, m_2 = 740. Применяя интегральную теорему Лапласа, получаем

$$P_{900}(690,740)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\ \text{где}$$

$$x_1=\frac{690-900\cdot 0{,}8}{\sqrt{900\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{-30}{12}=-2{,}5\ \text{ и }\ x_2=\frac{740-900\cdot 0{,}8}{\sqrt{900\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{5}{4}=1{,}67.$$

Находим значения функции $\Phi(x)$ по таблице 4

$$\Phi(x_1)=-0{,}4938,\qquad \Phi(x_2)=0{,}4525.$$

Тогда $P_{900}(690,740)\approx 0{,}4529+0{,}4938=0{,}9463$.

Определение. *Наивероятнейшим числом* m_0 *появления события* A *в* n *независимых испытаниях* называется число, для которого вероятность $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число определяется по формуле

$$n\cdot p-q\le m_0\le n\cdot p+p,$$

где n - число независимых испытаний,

p - вероятность наступления события A в одном испытании,

q - вероятность не наступления события A в одном испытании,

m_0 - наивероятнейшее число наступлений событий A.

Пример 14.16. При данном технологическом процессе 85% продукция высшего качества. Найти наивероятнейшее число изделий высшего качества среди 150 изделий.

Решение. По условию задачи $n=150$, $p=0{,}85$, $q=0{,}15$. Подставим эти значения в формулу для нахождения наивероятнейшего числа и решим неравенство

$$150\cdot 0{,}85-0{,}15\le m_0\le 150\cdot 0{,}85+0{,}85,$$

$$127{,}35\le m_0\le 128{,}35,$$

$$m_0=128.$$

Пример 14.17. Вероятность попадания в мишень для стрелка равна $\frac{4}{7}$. Определить наивероятнейшее число попадания при 13 выстрелах.

Решение. По условию задачи $n=13, p=\frac{4}{7}, q=\frac{3}{7}$. Тогда, подставляя эти значения в формулу для нахождения наивероятнейшего числа, получаем

$$13\cdot\frac{4}{7}-\frac{3}{7}\le m_0\le 13\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{7},$$

$$7\le m_0\le 8\ \Rightarrow\ m_0=7\ \text{ или }\ m_0=8.$$

§ 7. Случайные величины

Определение. *Случайной* называется величина, которая в результате опыта может принять одно и только одно возможное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Например, посеяно 100 зерен пшеницы для определения ее всхожести. Число взошедших зерен есть случайная величина, которая может принять одно из значений: 0, 1, 2, …, 100.

Определение. Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные друг от друга возможные значения, которые можно перенумеровать.

Число взошедших зерен пшеницы есть дискретная случайная величина.

Определение. *Непрерывной* случайной величиной называется такая случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток, конечный или бесконечный.

Например, расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть непрерывная случайная величина. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку $[a,b]$.

Случайные величины обозначаются: X, Y, Z и т.д.

Определение. *Законом распределения* дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения можно задать в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

x_i – возможные значения случайной величины X,

p_i – соответствующие им вероятности.

Определение. *Интегральной функцией распределения* случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства интегральной функции $F(x)$

1. Значения интегральной функции принадлежат отрезку $[0;1]$:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1.$

4. Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале (a,b), равна приращению интегральной функции на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно конкретное значение, равна нулю, т.е. $P(x = x_0) = 0$. Поэтому для непрерывной случайной величины справедлива формула

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Определение. *Дифференциальной функцией распределения или плотностью распределения вероятностей* случайной величины X в точке x называется отношение вероятности попадания непрерывной случайной величины на элементарный участок от x до $x + \Delta x$ к длине этого участка, когда $\Delta x \to 0$.

Обозначается плотность вероятности через $f(x)$. По определению имеем:

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to\infty} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Так как $P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$, то $f(x) = F'(x)$.

Таким образом, если существует $F'(x)$, то существует и $f(x)$, что обычно и предполагают.

Интегральная функция выражается через дифференциальную формулой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Свойства дифференциальной функции распределения

1. $f(x)\geq 0$, т.е. дифференциальная функция неотрицательна.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty;\infty)$, равна единице.

3. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение в интервале (a,b), равна определенному интегралу от дифференциальной функции распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

Геометрически эта вероятность равна площади S криволинейной трапеции:

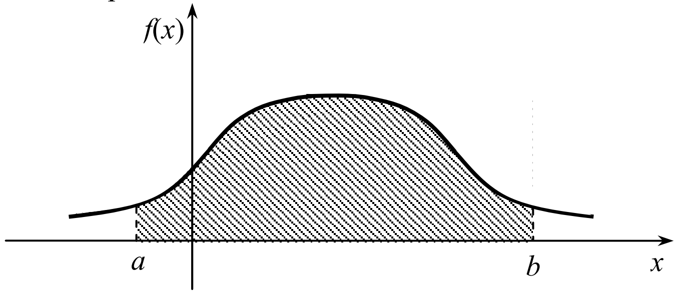


Рис. 14.1

Пример 14.18. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x>0,\\ a\sin x & при\ 0\leq x\leq\pi,\\ 0 & при\ x>\pi \end{cases}$$

Требуется: **1)** найти коэффициент *a,*
2) найти интегральную функцию распределения $F(x)$,
3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. Возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[0;\pi]$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi} f(x)dx=1,\ \int\limits_0^{\pi} a\sin xdx=1\Rightarrow -a\cos x\Big|_0^{\pi}=1,\ -a(\cos\pi-\cos 0)=1,$$

$$-a(-1-1)=1,\quad 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}.\ \text{Тогда}\ f(x)=\begin{cases} 0 & при\quad x>0,\\ \frac{1}{2}\sin x & при\ 0\leq x\leq\pi,\\ 0 & при\quad x>\pi. \end{cases}$$

Чтобы найти функцию $F(x)$, применяем равенство

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Если $x\geq 0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0.$

Если $0\leq x\leq\pi$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_0^{x}\frac{1}{2}\sin xdx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x .$$

Если $x>\pi$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin xdx+\int\limits_{\pi}^{x} 0dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\quad x<0,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x & при\ 0\leq x\leq\pi,\\ 1 & при\quad x>\pi. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 14.2 и рис. 14.3.

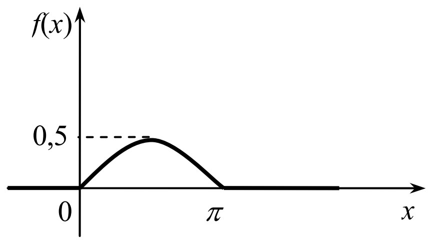


Рис. 14.2

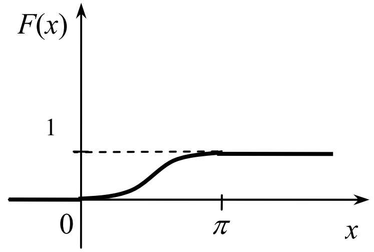


Рис. 14.3

§ 8. Числовые характеристики случайных величин

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам

$M[X]=m=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$ – для дискретной случайной величины,

$M[X]=m=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x$ – для непрерывной случайной величины.

Для встречающихся на практике случайных величин указанный несобственный интеграл сходится.

Свойства математического ожидания

1. $M[C]=C$, где С – постоянная величина.

2. $M[C\cdot X]=C\cdot M[X]$.

3. $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$, если X и Y – независимые случайные величины.

4. $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$.

Определение. Разность между значением случайной величины X и ее математическим ожиданием $M[X]$ называется *отклонением* случайной величины X, т.е. $X-M[X]$.

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M[X-M[X]]=0.$$

Определение. *Дисперсией* случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения:

$$D[X]=M[(X-M[X])^2].$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2\cdot p_i$ – для дискретной случайной величины,

$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M[X])^2\cdot f(x)dx$ – для непрерывной случайной величины.

Свойства дисперсии

1. $D[C]=0$, где С – постоянная величина.

2. $D[C\cdot X]=C^2\cdot D[X]$.

3. $D[X\pm Y]=D[X]+D[Y]$,

если X и Y - независимые случайные величины.

4. $D[X]=M\left[X^2\right]-M^2\left[X\right]$

Определение. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_x=\sigma[X]=\sqrt{D[X]}.$$

Пример 14.19. Задан закон распределения случайной величины.

x_i	-0,01	0	0,01	0,03
p_i	0,1	0,3	0,5	0,1

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины.

Решение. Применяем формулу $M[X]=m=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$ и получаем:

$$M[X]=-0{,}01\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}3+0{,}01\cdot 0{,}5+0{,}03\cdot 0{,}1=$$
$$=-0{,}001+0+0{,}005+0{,}003=0{,}007.$$

Для вычисления дисперсии применяем формулу $D[X]=M\left[X^2\right]-M^2\left[X\right]$.

$D[X^2]=(-0{,}01)^2\cdot 0{,}1+0^2\cdot 0{,}3+(0{,}01)^2\cdot 0{,}5+(0{,}03)^2\cdot 0{,}1-(0{,}007)^2=$
$=0{,}00001+0+0{,}00005+0{,}00009-0{,}000049=0{,}000101.$

$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}000101}=0{,}01$

Пример 14.20. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -3,\\ \frac{1}{9}(x+3)^2 & \text{при } -3<x\le 0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Найти: **а)** вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; **б)** плотность распределения вероятностей случайной величины X; **в)** $M[X]$ – математическое ожидание.

Решение. а) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интегрвале $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P\left(-\frac{1}{2} < X < -\frac{1}{4}\right) = F\left(-\frac{1}{4}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}+3\right)^2 - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2 = \frac{7}{48}.$$

б) Найдем плотность распределения вероятностей случайной величины X по формуле $f(x) = F'(x)$.

Получаем

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -3, \\ \frac{2}{9}(x+3) & \text{при } -3 < x \le 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

в) Математическое ожидание случайной величины X находим по формуле $$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$$

$$M[X] = \int_{-3}^{0} x \cdot \frac{2}{9}(x+3)\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\int_{-3}^{0}(x^2+3x)\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} = -1.$$

§ 9. Основные законы распределения

Биномиальный закон. Случайная величина X называется распределенной по *биномиальному закону*, если она принимает конечное множество значений 0, 1, 2, … n, а вероятность того, что $X = m$, выражается формулой:

$$P(X = m) = P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где $0 < p < 1$ - вероятность наступления события A при одном испытании, $q = 1 - p$.

Числовые характеристики биномиального закона распределения:

$$M[X] = np, \qquad D[X] = npq.$$

Закон Пуассона. Дискретная случайная величина X называется распределенной по *закону Пуассона*, если она принимает счетное множество значений 0, 1, 2, …, m, …, а вероятность того, что $X = m$, выражается формулой:

$$P(X = m) = P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ – параметр закона Пуассона.

Числовые характеристики закона Пуассона:

$$M[X] = \lambda, \qquad D[X] = \lambda.$$

Определение. *Интенсивностью потока* λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени. Доказано, что если известна постоянная интенсивность потока λ, то вероятность появления k событий за время длительностью t определяется формулой:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!}.$$

Пример 14.21. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит 3 вызова.

Решение. По условию задачи $\lambda = 2, \quad t = 5, \quad k = 3.$ Тогда

$$P_5(2) = \frac{(2 \cdot 5)^3}{3!}e^{-10} = \frac{1000}{6}\frac{1}{e^{10}} = 0{,}0075.$$

Равномерное распределение. Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* в интервале (α, β), если ее плотность распределения в этом интервале постоянна, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \alpha, \\ \frac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha < x \le \beta, \\ 0, & x > \beta. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного закона распределения:

$$M[X]=\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad D[X]=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

График дифференциальной функции равномерного распределения приведен на рис. 14.4.

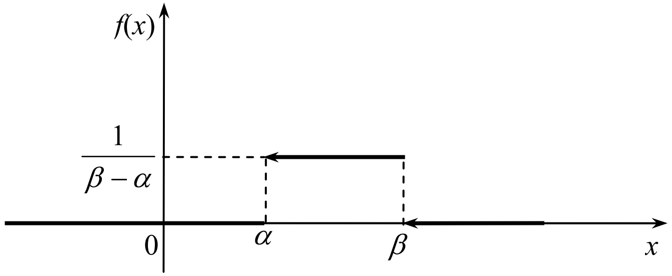


Рис. 14.4

Нормальное распределение. Непрерывная случайная величина называется *нормально распределенной*, если ее плотность распределения равна

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m - математическое ожидание,

σ - среднее квадратическое отклонение.

График дифференциальной функции $f(x)$ нормального закона распределения (нормальная кривая или кривая Гаусса) имеет вид

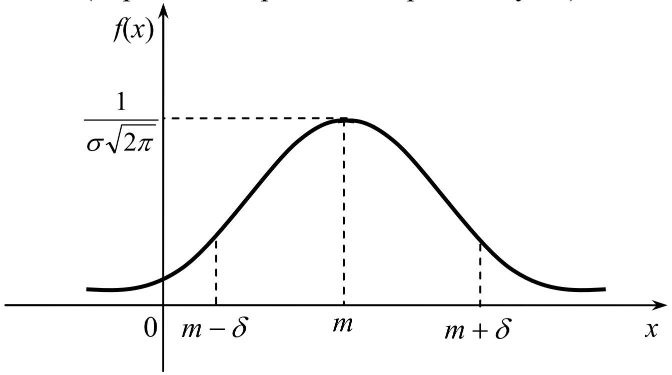


Рис. 14.5

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение в интервале (a,b), выражается формулой:

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Для нормального закона распределения верна следующая формула:

$$P(|X-m|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Показательное распределение. *Показательным* называется распределение, дифференциальная функция которого имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \lambda\cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{если } x\ge 0,\end{cases}$$

где $\lambda>0$ – параметр показательного распределения.

График дифференциальной функции показательного распределения приведен на рис. 14.6.

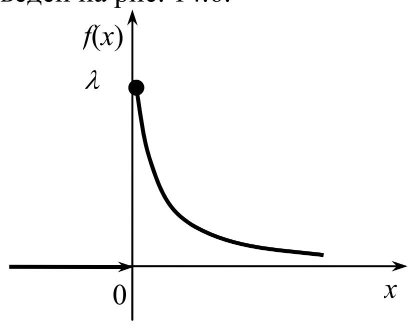


Рис. 14.6

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M[X]=\frac{1}{\lambda}, \qquad D[X]=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Интегральная функция для показательного распределения имеет вид $F(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Функция надежности

Показательное распределение широко применяется в теории надежности.

Пусть T – продолжительность безотказной работы прибора. Функция распределения случайной величины T выражает вероятность отказа за время t:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Определение. *Функцией надежности* $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t) = 1 - F(t).$$

Для показательного закона распределения вероятность безотказной работы элемента за время t вычисляется по формуле:

$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, где λ - интенсивность отказов.

Пример 14.22. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительности безотказной работы элементов равны

$$R_1(t) = e^{-0{,}02t}, \quad R_2(t) = e^{-0{,}05t}.$$

Найти вероятность того, что за время длительностью 6 часов

1) оба элемента откажут,

2) оба элемента не откажут,

3) откажет хотя бы один элемент.

Решение. Рассмотрим случайные величины:

T_1 - время безотказной работы 1-го элемента.

T_2 - время безотказной работы 2-го элемента.

Находим вероятности отказов элементов:

$$P_1 = P(T_1 < 6) = 1 - e^{-0{,}02\cdot 6} = 1 - e^{-0{,}12} = 0{,}113,$$

$$P_2 = P(T_2 < 6) = 1 - e^{-0{,}05\cdot 6} = 1 - e^{-0{,}30} = 0{,}259.$$

Найдем вероятности следующих событий.

1. Событие A – оба элемента откажут имеет вероятность

$$P(A) = P_1 \cdot P_2 = 0{,}113 \cdot 0{,}259 = 0{,}03.$$

2. Событие B – оба элемента не откажут имеет вероятность

$$P(B) = (1 - P_1)\cdot(1 - P_2) = 0{,}887 \cdot 0{,}741 = 0{,}66.$$

3. Событие C – хотя бы один элемент откажет имеет вероятность

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}66 = 0{,}34.$$

Пример 14.23. Станок–автомат изготовляет шарики для подшипника. Шарик считается годным, если отклонение X его диаметра от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,9 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально с нулевым математическим ожиданием и со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}5$ мм, найти, сколько процентов годных шариков изготавливает станок-автомат.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

где $m = M[X]$, $\sigma^2 = D[X]$, $\Phi(x)$ – функция интегральной теоремы Лапласа.

По условию задачи $M[X] = m = 0$, $\sigma = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}9$, поэтому

$$P(|X| < 0{,}9) = 2\Phi(1{,}8) = 2 \cdot 0{,}4641 = 0{,}9282.$$

Таким образом, станок-автомат изготавливает 92,8% годных шариков.

§ 10. Элементы математической статистики

Математическая статистика занимается разработкой методов получения, описания и обработки опытных данных с целью получения закономерностей случайных массовых явлений.

Задачи математической статистики.

Первая задача – указать способы сбора и группировки статистических данных.

Вторая задача – разработать методы анализа и обработки полученных статистических данных в зависимости от целей исследований.

Определение. Совокупность N объектов, из которых производится выборка объектов для исследования, называется *генеральной* совокупностью.

Определение. Совокупность n объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называется выборочной совокупностью или *выборкой* ($n \le N$).

Определение. Выборка называется *бесповторной*, если отобранный для исследования случайным образом объект в генеральную совокупность не возвращается.

Определение. Выборка называется *повторной,* если отобранный случайным образом объект перед отбором следующего объекта возвращается в генеральную совокупность.

Для того, чтобы выборка давала правильное представление о генеральной совокупности, она должна быть *представительной* или *репрезентативной*, т.е. для каждого объекта генеральной совокупности вероятность попасть в выборку одна и та же.

Пусть совокупность объектов N исследуется по некоторому признаку *X*. Произведем выборку объема *n*. Пусть в результате эксперимента случайная величина X приняла значения $x_1 - n_1$ раз, $x_2 - n_2$ раз, … , $x_k - n_k$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$

Определение. Наблюдаемые значения x_i называется *вариантами,* а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом.*

Определение. Числа n_i называется *частотами*, числа $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$ называются *относительными частотами*, $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1.$

Определение. *Статистическим распределением* выборки называется задание вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Определение. Таблица

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

или

x_i	x_1	x_2	…	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	…	ω_k

называется *статистическим рядом*.

Пусть изучается генеральная совокупность относительно некоторого признака *X*. Пусть $x_1, x_2, ..., x_N$ – возможные значения этого признака, причем все различные.

Определение. *Генеральной средней* $\bar{x}_Г$ называется среднее арифметическое возможного значения

$$\bar{x}_Г = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

Если же не все значения различны, а различные значения x_i признака *X* принимаются $x_1 - N_1$ раз, $x_2 - N_2$ раз, … , $x_k - N_k$ раз, тогда

$$\bar{x}_Г = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N}.$$

Предположим, что все объекты генеральной совокупности объема N имеют различные значения. Если взять один объект, то вероятность, что он обладает x_i признаком, равна $\dfrac{1}{N}$. Тогда

$$M[X] = \frac{1}{N} x_1 + \frac{1}{N} x_2 + ... + \frac{1}{N} x_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + ... + x_N) = \bar{x}_Г.$$

Итак, генеральная средняя есть математическое ожидание рассматриваемого признака *X.*

Пусть требуется изучить генеральную совокупность объема N относительно признака *X*. Извлечем выборку объема *n*.

Определение. *Выборочной средней* $\bar{x}_в$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Если не все значения признака различны, то

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_n n_k}{n}.$$

Если из генеральной совокупности извлечена выборка, то она имеет выборочную среднюю, которая является определенным числом. Другая выборка, извлеченная из генеральной совокупности, будет иметь свою выборочную среднюю, которую можно рассматривать как случайную величину, а следовательно, можно говорить о распределении выборочной средней и о ее числовых характеристиках.

Замечание. В теоретических рассуждениях выборочные значения признака X рассматриваются как случайные величины, имеющие то же распределение и те же числовые характеристики, что и признак X.

Рассмотрим генеральную совокупность объема N. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - значения количественного признака X – различны.

Определение. *Генеральной дисперсией* $D_Г$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака x_i генеральной совокупности от генеральной средней $\bar{x}_Г$.

$$D_Г = \frac{(x_1 - x_Г)^2 + (x_2 - x_Г)^2 + ... + (x_N - x_Г)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_Г)^2}{N}.$$

Если же не все значения признака различны, т.е. $x_1 - N_1$ раз, $x_2 - N_2$ раз, … , $x_k - N_k$ раз, то

$$D_Г = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_Г)^2}{N}.$$

Средним квадратическим отклонением генеральной совокупности называется

$$\sigma_x = \sqrt{D_Г}.$$

Пусть требуется изучить генеральную совокупность объема N относительно признака X. Извлечем выборку объема n.

Определение. *Выборочной дисперсией* $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака x_i выборочной совокупности от выборочной средней $\bar{x}_в$.

$$D_в = \frac{(x_1 - x_в)^2 + (x_2 - x_в)^2 + ... + (x_n - x_в)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_в)^2}{n}.$$

Если же не все значения признака различны, то $D_в = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_в)^2}{n}$.

Средним квадратическим отклонением выборочной совокупности называется

$$\sigma_x = \sqrt{D_в}.$$

Пусть известно статистическое распределение некоторого признака X:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Пусть x – некоторое действительное число. Обозначим n_x - сумму частот, варианты которых меньше x.

Тогда $\dfrac{n_x}{n}$ – относительная частота события $X < x$.

Определение. *Статистической* (*эмпирической*) функцией распределения называется функция

$$F^*(x) = P^*(X < x) = \frac{n_x}{n}.$$

Статистическая функция $F^*(x)$ сходственна с интегральной функцией распределения $F(x)$, которую в математической статистике называют *теоретической функцией* распределения.

Различие между этими функциями состоит в том, что $F(x)$ задает вероятность события $X < x$, $F^*(x)$ задает относительную частоту этого события $F^*(x) = P^*(X < x)$.

Функция $F^*(x)$ обладает всеми свойствами функции $F(x)$.

1. $0 \le F^*(x) \le 1$.

2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

3. Если $x < x_{\min}$, то $F^*(x)$=0, если $x > x_{\max}$, то $F^*(x)$=1.

В целях наглядности строят графики статистического распределения выборки.

Определение. *Полигоном* частот называется ломаная линия с вершинами в точках (x_i, n_i).

Полигоном относительных частот называется ломаная линия с вершинами в точках (x_i, ω_i).

Пример 14.23. В магазине было продано за день 40 костюмов. Имеется вариационный ряд случайной величины X- размера костюма.

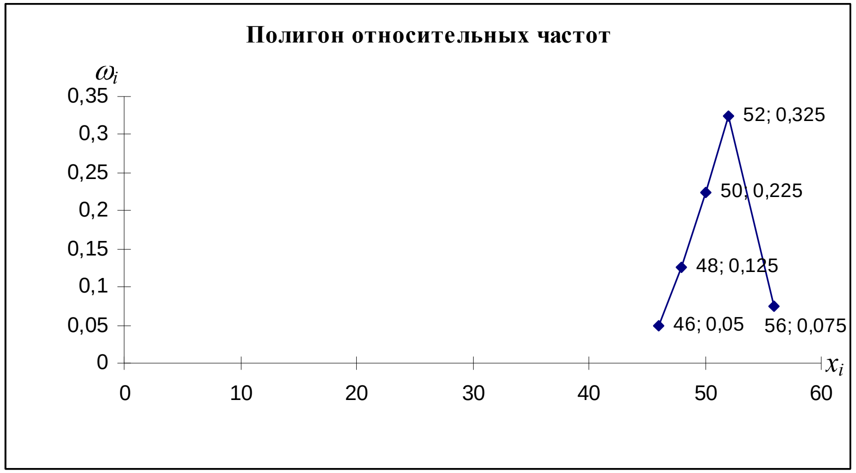
x_i	46	48	50	52	54	56
n_i	2	5	9	13	8	3

Построить полигон относительных частот.

Решение. Составим ряд относительных частот.

x_i	46	48	50	52	54	56
ω_i	$\frac{2}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{3}{40}$

Проверка: $\sum_{i=1}^{6} \omega_i = 1$.



Определение. *Гистограммой* частот (относительных частот) называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниям которых служат отрезки длины Δx_i, лежащие на оси *Ox*, а высотами –отрезки длиной $\frac{n_i}{\Delta x_i}\left(\frac{\omega_i}{\Delta x_i}\right)$.

Значения длин Δx_i выбираются следующим образом. Интервал, на котором находятся все значения вариант, делят на m равных частей и через n_i обозначают сумму всех частот, варианты которых оказались на i-ом отрезке.

Если в генеральной совокупности признак имеет дискретное значение, то промежуток в котором находятся варианты разбиваем на части так, чтобы на каждом участке была одна варианта.

Пример 14.23.Стадо коров в 1000 голов обследуется на жирность молока. Для обследования случайным образом отобрано 50 коров. Объем генеральной совокупности $N = 1000$. Объем выборки n=50.

При этом получено статистическое распределение:

x_i % жирности	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3
n_i	2	3	7	8	9	11	5	3	2

Составить ряд распределения относительных частот w_i. Записать статистическую функцию распределения $F^*(x)$.

Решение. Так как нам известно, что ,то статистический ряд распределения относительных частот имеет вид

x_i % жирности	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3
n_i	2	3	7	8	9	11	5	3	2
ω_i	0,04	0,06	0,14	0,16	0,18	0,22	0,1	0,06	0,04

Составим статистическую функцию распределения $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$.

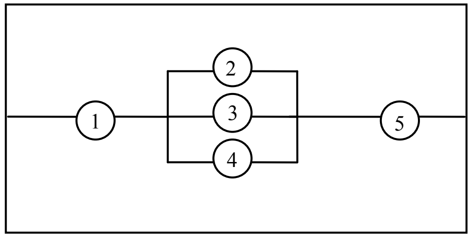
$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 3{,}5, \\ 0{,}04, & \text{если } 3{,}5 < x \le 3{,}6, \\ 0{,}1, & \text{если } 3{,}6 < x \le 3{,}7, \\ 0{,}24, & \text{если } 3{,}7 < x \le 3{,}8, \\ 0{,}4, & \text{если } 3{,}8 < x \le 3{,}9, \\ 0{,}58, & \text{если } 3{,}9 < x \le 4, \\ 0{,}8, & \text{если } 4 < x \le 4{,}1, \\ 0{,}91, & \text{если } 4{,}1 < x \le 4{,}2, \\ 0{,}96, & \text{если } 4{,}2 < x \le 4{,}3, \\ 1, & \text{если } 4{,}3 < x < \infty. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. В группе студентов, состоящей из 20человек, 12 юношей и 8 девушек. Для поездки на сельхозработы случайным образом отобрано двое студентов. Какова вероятность того, что среди них будет **а)** 2 юноши; **б)** один юноша и одна девушка?

2. Три стрелка производят выстрел по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что произойдет не менее двух попаданий.

3. Электрическая цепь состоит из пяти, работающих независимо друг от друга. Определить надежность работы цепи, если надежность работы каждого элемента p_i указана на рисунке



$p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}81$, $p_3 = 0{,}82$, $p_4 = 0{,}85$, $p_5 = 0{,}94$.

4. На сборку поступают шестерни с 3-х автоматов. Первый дает 25%, второй – 30% и третий – 45% шестерен, поступающих на сборку. Первый автомат допускает 0,1% брака шестерен, второй– 0,2%. третий – 0,3%. Найти вероятность поступления на сборку бракованной шестерни.

5. В ремонтной мастерской имеются 4 мотора. Для каждого мотора вероятность того, что он включен, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент **а)** включено 3 мотора; **б)** включен хотя бы один мотор; **в)** включено не менее трех моторов.

6. Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании не зависит от влияния остальных факторов и равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших

факторов в одном испытании. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа отказов факторов.

7. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4} & \text{при } -1<x\le \dfrac{1}{3},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Найти **а)** дифференциальную функцию распределения;
б) вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

8. Случайная величина X задана дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 2(1-x) & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X.

9. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (-1, 1). Написать выражение для плотности вероятности, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

10.В каком случае верно составлен ряд распределения случайной величины X?

а)

x_i	2	3	7	9
p_i	0,1	0,1	0,1	0,8

б)

x_i	2	3	7	9
p_i	0,1	0,1	0,1	0,6

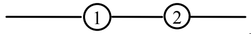
в)

x_i	2	3	7	9
p_i	0,1	0,1	0,1	0,7

г)

x_i	2	3	7	9
p_i	0,1	0,1	0,1	0,5

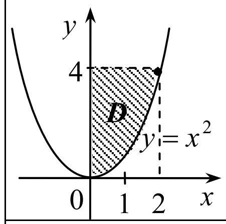
КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №14

1⁰. Вероятность Р случайного события А удовлетворяет условию **а)** $P(A)=0$; **б)** $P(A)=1$; **в)** $P(A)>1$; **г)** $0<P(A)<1$.
2⁰. Какова вероятность выпадения очка равного 3 при одном бросании игрального кубика? **а)** 1; **б)** 1/6; **в)** 1/3; **г)** 2/3.
3. Цепь работает по схеме  . Работа каждого элемента является независимым событием, вероятность которого равна 0,8. Найти вероятность работы цепи.
4. Вероятность события А при наступлении хотя бы одного события H_i (i=1, 2, …,n) из полной группы событий находится по формуле: **а)** $P(A)=\sum_{i=1}^{\infty} H_i P(A)$; **б)** $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A)$; **в)** $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)$; **г)** $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)+P_{H_i}(A)$.
5. Если монету бросают 7 раз, то вероятность выпадения герба в 5 случаях вычисляется по формуле: **а)** $C_7^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^7$; **б)** $C_7^5\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^7$; **в)** $C_7^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5$; **г)** $C_7^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2$.
6. Какое свойство математического ожидания не выполняется? **а)** $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$; **б)** $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$; **в)** $M[CX]=CX$; **г)** $M[X-M[X]]=0$.
7. Заполните пустую клетку ряда распределения случ. величины Х

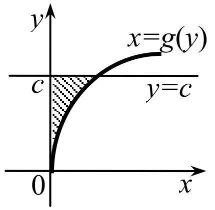
x_i	-2	3	7	9
p_i	0,1	0,2	0,1	

8. Вычислите математическое ожидание случайной величины из задания 7.
9*. Если случайная величина X – число выпадения герба при 3 бросаниях монеты, то ее дисперсия $D[X]$ равна **а)** 1; **б)** 0,5; **в)** 0,75; **г)** 0,8.
10*. Станок изготавливает за смену 100000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали рана 0,0001. Если случайная величина Х-число бракованных деталей за смену среди 5 отобранных деталей, то ее дисперсия $D[X]$ равна **а)** 1; **б)** 10; **в)** 12; **г)** 18.

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ №4

1⁰. Какое свойство справедливо для двойного интеграла ($c=const$)? **а)** $\iint_D cf(x,y)\mathrm{d}s = c\iint_D f(x,y)\mathrm{d}s$; **б)** $\iint_D cf(x,y)\mathrm{d}s = c^2\iint_D f(x,y)\mathrm{d}s$; **в)** $\iint_D cf(x,y)\mathrm{d}s = 2c\iint_D f(x,y)\mathrm{d}s$; **г)** $\iint_D cf(x,y)\mathrm{d}s = c\iint_D cf(x,y)\mathrm{d}s$.
2⁰. Интеграл вида $\int_{L_{AB}} xydx+(y-x^2)dy$ является: **а)** определенным интегралом; **б)** неопределенным интегралом; **в)** криволинейным интегралом 2-го рода; **г)** суммой двух определенных интегралов.
3⁰. Вероятность P невозможного события B удовлетворяет условию **а)** $P(B)=0$; **б)** $P(B)=1$; **в)** $P(B)>1$; **г)** $0<P(B)<1$.
4⁰. Как называется векторное поле $\vec{a}(M)$, если в каждой его точке $div\,\vec{a}(M)=0$ и $rot\,\vec{a}(M)=0$? **а)** потенциальное; **б)** гармоническое; **в)** трубчатое; **г)** соленоидальное.
5⁰. Какова вероятность извлечения туза из колоды 36 карт? **а)** 1/36; **б)** 1/6; **в)** 1/9; **г)** 2/3.
6. Вычислить двойной интеграл $\iint_D 2xydxdy$, если область D задается неравенствами $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.
7. Если в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$, где область D изображена на рисунке, перейти к повторному интегралу, то он имеет вид  **а)** $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^4 f(x,y)\mathrm{d}y$; **б)** $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{x^2}^4 f(x,y)\mathrm{d}x$; **в)** $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{x^2}^4 f(x,y)\mathrm{d}y$; **г)** $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$.
8. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (y-x^2)dy$, по дуге L: $y=x^2+1$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(2;5)$. **а)** 0; **б)** 1; **в)** 4; **г)** 2.

9. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, находится с помощью интеграла



а) $S=\int\limits_c^d dx\int\limits_c^d g(x)dy$; **б)** $S=\int\limits_0^d dx\int\limits_0^d g(x)dx$;

в) $S=\int\limits_0^c dy\int\limits_0^{g(y)} dx$; **г)** $S=\int\limits_0^c dx\int\limits_0^{g(y)} dy$.

10. Если игральную кость бросают 7 раз, то вероятность выпадения очка равного 5 в 4 случаях вычисляется по формуле:

а) $C_7^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^7$; **б)** $C_7^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^3$; **в)** $C_7^5\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^3$; **г)** $C_7^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^2$.

11. Какое свойство справедливо для функции распределения $F(x)$ случайной величины X?

а) $F(-\infty)=1$; **б)** $F(+\infty)=0$; **в)** $F(+\infty)=1$; **г)** $F(+\infty)=-1$.

12. Если плотность случайной величины вычисляется по формуле $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}}$, то математическое ожидание $M[X]$ данной случайной величины равно…

13*. Какое из выражений является полным дифференциалом?

а) xy^2dx+x^2ydy; **б)** xy^2dx-x^2ydy;

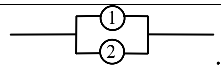
в) $x^2ydx+xy^2dy$; **г)** $x^2ydx-xy^2dy$.

14*. Найти работу силы $\vec{F}=xy\vec{i}+x^2\vec{j}$ вдоль окружности $x^2+y^2=4$ в положительном направлении.

15*. Для функции $u=xy+3yz+2zx$ найти $div\,grad\,u$.

а) $y\vec{i}+3z\vec{j}+2x\vec{k}$; **б)** $y+3z+2x$; **в)** 0; **г)** 6.

16*. Цепь работает по схеме



. Работа каждого элемента является независимым событием, вероятность которого равна 0,5. Найти вероятность работы системы.

а) 0,75; **б)** 0,25; **в)** 0,125; **г)** 1,25.

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

Интегрирование некоторых типов дифференциальных уравнений (ДУ) первого порядка

Таблица 1

Тип уравнения	Метод решения
Простейшее ДУ первого порядка $y'=f(x)$	Проинтегрировать правую часть $y=\int f(x)dx+C$
ДУ с разделенными переменными $M(x)dx+N(y)dy=0$	Почленно проинтегрировать $\int M(x)dx++\int N(y)dy=C$
ДУ с разделяющимися переменными $M_1(x)N_1(y)dx++M_2(x)N_2(y)dy=0$	«Разделить» переменные, разделив уравнение на $M_2(x)N_1(x)$ и проинтегрировать $\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx++\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C$
Однородное ДУ первого порядка $y'=f(x,y)$, где $f(tx,ty)=f(x,y),\ t\in R$	Решается заменой $y=u(x)\cdot x=ux,\quad y'=u'x+u$
Линейное ДУ 1-ого порядка $y'+p(x)y=q(x)$	Решается заменой $y=u(x)\cdot v(x)=uv,\ y'=u'v+uv'$
ДУ Бернулли $y'+p(x)y=q(x)y^n\ (n\neq 0, n\neq 1)$	Решается заменой $y=u(x)\cdot v(x)=uv,\ y'=u'v+uv'$

Интегрирование некоторых типов дифференциальных уравнений (ДУ) второго порядка

Таблица 2

Тип уравнения	Метод решения	
Простейшее ДУ 2-го порядка **а)** $y'' = f(x)$	**а)** Произвести двукратное интегрирование правой части $\int\left(\int f(x)dx\right)dx + c_1x + c_2$	
б) $y'' = f(x, y')$	**б)** Решается заменой $y' = z(x) = z,\ y'' = z'$	
в) $y'' = f(y, y')$	**в)** Решается заменой $y' = p(y) = p,\ \ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$	
Линейное однородное ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$	Находим корни k_1, k_2 характеристического уравнения: $k^2 + pk + q = 0$. Если	
	1) $k_1 \neq k_2 \in R$	$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$
	2) $k_1 = k_2$	$y = e^{k_1x}(c_1 + c_2x)$
	3) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексные	$y = e^{\alpha x}(c_1\sin\beta x + c_2\cos\beta x)$
Линейное неоднородное ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$	Найти общее решение $\tilde{y}$ соответствующего линейного однородного ДУ и одно из частных решений y^* линейного неоднородного ДУ (y^* находится спомощью таблицы 2 (продолжение) Тогда общее решение имеет вид $y = \tilde{y} + y^*$.	

Вид частного решения y^* линейного неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$

Продолжение таблицы 2

f(x)		***y****
1. ***$P_n(x)$***	**а)** $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$	***$Q_n(x)$***
	б) $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ или $k_1 \neq 0, k_2 = 0$	***$x\,Q_n(x)$***
	в) $k_1 = k_2 = 0$	***$x^2\,Q_n(x)$***
2. ***$A\,e^{\alpha x}$***	**а)** $k_1 \neq \alpha, k_2 \neq \alpha$	***$B\,e^{\alpha x}$***
	б) $k_1 = \alpha, k_2 \neq \alpha$ или $k_1 \neq \alpha, k_2 = \alpha$	***$B\,x\,e^{\alpha x}$***
	в) $k_1 = k_2 = \alpha$	***$B\,x^2\,e^{\alpha x}$***
3. ***$e^{\alpha x}\,P_n(x)$***	**а)** $k_1 \neq \alpha, k_2 \neq \alpha$	***$e^{\alpha x}\,Q_n(x)$***
	б) $k_1 = \alpha, k_2 \neq \alpha$ или $k_1 \neq \alpha, k_2 = \alpha$	***$x\,e^{\alpha x}\,Q_n(x)$***
	в) $k_1 = k_2 = \alpha$	***$x^2\,e^{\alpha x}\,Q_n(x)$***
4. ***$P_n(x)\cos\beta x$ или $R_n(x)\sin\beta x$***	**а)** $k_1 \neq \pm\beta i, k_2 \neq \pm\beta i$	***$Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x)$***
	б) $k_1 = \pm\beta i$	***$x(Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x))$***
5. ***$e^{\alpha x}\,P_n(x)\cos\beta x$ или $e^{\alpha x}\,R_n(x)\sin\beta x$***	**а)** $k_1 \neq \alpha \pm \beta i, k_2 \neq \alpha \pm \beta i$	***$e^{\alpha x}\,(Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x))$***
	б) $k_1 = \alpha \pm \beta i$	***$xe^{\alpha x}(Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x))$***
6. ***$e^{\alpha x}\,(P_l(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)$***	**а)** $k_1 \neq \alpha \pm \beta i, k_2 \neq \alpha \pm \beta i$	***$e^{\alpha x}\,(Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x))$***
	б) $k_1 = \alpha \pm \beta i$	***$xe^{\alpha x}(Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x))$ $n=max(l,m)$***

Где $P_n(x)$, $Q_n(x)$, $R_n(x)$, $S_n(x)$ – многочлены степени n, причем
$P_0(x)=A$,
$P_1(x)=Ax+B$,
$P_2(x)=Ax^2+Bx+C$, *где A, B, C* – некоторые действительные числа.

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

Таблица 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Таблица 4

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продолжение таблицы 4

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4673
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

ОТВЕТЫ

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №8

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВАРИАНТ ОТВЕТА	$-3-3i$	**в**	**б**	**г**	**г**	**а**	**а**	**б**	$\pm 2i$	**б**

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №9

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**б**	**б**	**в**	**б**	**б**	$k^2+5=0$	**а**	**в**

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №10

№	1	2	3	4	5	6	7
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**в**	**а**	**а**	**а**	**б**	**б**	**г**

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ №3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**в**	**б**	**в**	**б**	**а**	$13-12i$	**в**	**г**	**а**
№	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**в**	**в**	**в**	**б**	**б**	$-\frac{1}{25}\cos 5x+c_1x+c_2$	$c_1+c_2e^{x^2}$	**б**	**г**

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №11

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**г**	**в**	$\frac{1}{6}$	**б**	**в**	$\frac{16}{3}$	**в**	**в**

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №12

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**а**	**г**	**2**	**в**	**а**	**в**	π	**б**

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №13

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**в**	**в**	**а**	**б**	**а**	**б**	**в**	**а**

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №14

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**г**	**б**	**0,64**	**в**	**г**	**в**	**0,6**	**6,5**	**0,75**	**100**

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ №4

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**а**	**в**	**а**	**б**	**в**	**1**	**в**	**в**
№	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
ВАРИАНТ ОТВЕТА	**в**	**б**	**в**	**2**	**а**	**0**	**в**	**а**

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАТЕМАТИКА
(ЧАСТЬ 2)

Учебно-методический комплекс
для студентов
высших учебных заведений
по направлению образования 74 06 Агроинженерия

Ответственный за выпуск *Морозова И. М.*
Компьютерный набор и верстка *Боярина И.П.*

Издано в редакции авторов

Подписано в печать 21.01.2009г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 6,54. Тираж 850 экз. Заказ
Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный аграрный технический университет
ЛИ № 02330/0131734 от 10.02.2006. ЛП № 02330/0131656 от 02.02.2006.
220023, г. Минск, пр. Независимости, 99, к. 2.